3.8 Continuité et dérivabilité sous le signe $\int$

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, f une fonction de $X \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par f_t, f_x les applications partielles

$$x \longmapsto f_t(x) = f(x,t) \quad \text{et} \quad t \longmapsto f_x(t) = f(x,t).$$

Nous supposerons dans tout ce paragraphe que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction f_t est intégrable

$$f_t \in L^1(\mu), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{3.27}$$

On définit alors une fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant

$$F(t) = \int f_t(x) d\mu(x) = \int f(x,t) d\mu(x) \tag{3.28}$$

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à la continuité et dérivabilité de la fonction F.

Théorème 3.8.1 *(Continuité sous $\int$)*
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant l'hypothèse (3.27) et $t_0 \in \mathbb{R}$; on suppose de plus que
(i) Pour presque partout $x \in X$, la fonction f_x est continue de la variable t au point $t_0 \in \mathbb{R}$.
(ii) Il existe $\varepsilon > 0$, et $g \in L^1(\mu)$ tels que

$$|f(x,t)| \leq g(x), \text{ pour tout } t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[.$$

Alors, la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par (3.28), est continue en t_0.

Démonstration. Il suffit de montrer que $F(t_n) \longrightarrow F(t_0)$ pour toute suite $(t_n)_n$ de $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ qui converge vers t_0. Posons

$$f_n(x) = f(x, t_n).$$

Pour presque partout $x \in X$, la fonction f_x est continue au point t_0 et donc

$$f_n(x) = f(x, t_n) = f_x(t_n) \longrightarrow f_x(t_0) = f(x, t_0),$$

quand $n \longrightarrow +\infty$. Par ailleurs,

$$|f_n(x)| = |f(x, t_n)| \leq g(x)$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue (Théorème 3.6.1), on a

$$F(t_n) = \int f_n(x) d\mu(x) \longrightarrow \int f(x, t_0) d\mu(x) = F(t_0)$$

quand $n \longrightarrow +\infty$, d'où le théorème. ■

Théorème 3.8.2 *(Dérivation sous le signe $\int$)*
Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant l'hypothèse (3.27) et $t_0 \in \mathbb{R}$; on suppose de plus qu'il existe $\varepsilon > 0$, $A \in \mathcal{M}$ et $g \in L^1(\mu)$ tels que
(i) L'application $t \mapsto f(x, t)$ est dérivable pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ et pour tout $x \in A^c$.
(ii) Pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ et pour tout $x \in A^c$ on a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x).$$

Alors, la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par (3.28), est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x).$$

Démonstration. Soit $(t_n)_n$ une suite de $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ telle que $t_n \longrightarrow t_0$ lorsque et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \geq 1$. Soit f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0}.$$

La suite $(f_n)_n$ est dans $L^1(\mu)$ et converge presque partout vers la fonction $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$ car l'application $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ est continue pour tout $x \in A^c$. Par ailleurs, d'après le théorème d'accroissements finis, si $x \in A^c$ et $n \geq 1$, il existe $\theta_{x,n} \in]0, 1[$ tel que

$$f_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}\left(x, \theta_{x,n} t_0 + (1 - \theta_{x,n}) t_n\right)$$

et donc

$$|f_n(x)| \leq g(x), \text{ pour tout } x \in A^c \text{ et } n \geq 1.$$

D'après le théorème de convergence dominée (Théorème 3.6.1) (appliquée sur la suite $(f_n)_n$), la fonction $x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ (qui est définie presque partout $x \in X$) est dans $L^1(\mu)$ et on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n(x) d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x)$$

Ceci etant vrai pour toute suite $(t_n)_n$ dans $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ telle que $t_n \longrightarrow t_0$ lorsque et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \geq 1$, on en déduit bien que F est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x).$$

■

3.9 Application au calcule de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

D'après le Théorème 3.7.4, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, +\infty[$. Posons

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

et proposons nous de calculer la valeur de I. A cet effet, considérons la fonction f définie pour $x \geq 0$ par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$$

comme on a

$$\left| \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}, \text{ pour tout } x, t \geq 0$$

et que la fonction $t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$ est Lebesgue intégrable sur $[0, +\infty[$, la fonction f est bien définie, et elle est continue en vertu du Théorème 3.8.1. Notons que l'on a

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

En outre, puisque $\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$ pour tout $t > 0$, il résulte du théorème de convergence dominnée (Théorème 3.6.1) que $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$. Pour $x > 0$ on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right) = \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}.$$

En outre, pour $x \geq a > 0$, on a

$$\left| \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right) \right| = t^2 \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \leq e^{-at^2}$$

et, comme la comme fonction $t \longmapsto e^{-at^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, il résulte du théorème de dérivation sous signe d'intégration que f est dérivable sur tout intervalle $]a, +\infty[$ avec $a > 0$, donc est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée

$$f'(x)) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$$

On a donc

$$f(x) - f'(x)) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt, \text{ pour } x > 0.$$

Posons $u = \sqrt{x}t$ dans la dernière, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{I}{\sqrt{x}}.$$

La fonction f est donc sulution de l'équation différentielle

$$f - f' = \frac{I}{\sqrt{x}} \tag{3.29}$$

Alors,

$$f(x) = e^x \left(C - 2I \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt \right), \text{ pour } x > 0,$$

et cette formule reste vraie par continuité pour $x = 0$. Puisque $f(0) = \frac{\pi}{2}$, on a $C = \frac{\pi}{2}$ et donc au total

$$f(x) = e^x \left(\frac{\pi}{2} - 2I \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt \right)$$

Puisque $f(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$, on a nécessairement

$$\frac{\pi}{2} - 2I \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 0,$$

sait $\frac{\pi}{2} - 2I^2 = 0$, d'où l'on tire

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$