3.4 Intégrale d'une fonction mesurable

Soit $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ ($f \in \mathcal{L}^0$) une fonction numérique mesurable et soient f_+ et f_- les parties positive et négative de f. Puisque $f = f_+ - f_-$ et $|f| = f_+ + f_-$ on a f est mesurable si et seulement si f_+ et f_- sont mesurables.

Définition 3.4.1 *On dit que f est intégrable par rapport à μ si*

$$\int |f|\, d\mu < \infty.$$

Dans ce cas, on pose

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \tag{3.19}$$

On notera $\mathcal{L}^1(\mu)$ l'espace des fonctions $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrables.

Remarque 3.4.2 *Si* $\int |f| \, d\mu < \infty$, *alors comme* $f_+ \leq |f|$ *et* $f_- \leq |f|$, *on a aussi*

$$\int f_+ d\mu < \infty \quad et \quad \int f_- d\mu < \infty$$

et la définition précédente fait sens.

Donnons un premier exemple de fonction intégrable.

Exercice corrigé 3.4.3 *Soit* $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. On suppose qu'il existe une partie mesurable* $A \in \mathcal{M}$ *telle que*
i) $\mu(A) < \infty$ *et* $f(x) = 0$ *pour tout* $x \notin A$
ii) Il existe un réel $C > 0$ *tel que* $|f(x)| \leq C$ *pour tout* $x \in A$.
Montrer que $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Démonstration. De i) et ii) on déduit que

$$|f| \leq C\chi_A$$

D'où

$$\int |f| \, d\mu \leq \int C\chi_A d\mu = C\mu(A) < \infty$$

Comme f est mesurable, on en déduit que $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. ■

Proposition 3.4.4 *Soit* $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *une fonction numérique intégrable. Alors, l'ensemble*

$$A = \{x \in X : |f(x)| = +\infty\}$$

est négligeable.
En d'autres termes toute fonction intégrable $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *est égale presque partout à une fonction intégrable* $\widetilde{f} : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Pour tout $n \geq 1$ posons

$$A_n = \{x \in X : |f(x)| \geq n\} = |f|^{-1} ([n, +\infty]) \in \mathcal{M}$$

Donc on a

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{et} \quad A_{n+1} \subset A_n, \text{ pour tout } n \geq 1$$

Et aussi la relation $\chi_{A_1} \leq |f|$ implique que

$$\mu(A_1) = \int \chi_A d\mu \leq \int |f| \, d\mu < +\infty.$$

Donc par la contonuité décroissante on obtient

$$\mu(A) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

D'après l'inégalité de Tchebychev (3.14) pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mu(A_n) = \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int |f| \, d\mu = \frac{C}{n} \longrightarrow 0$$

On en déduit que

$$\mu(A) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0.$$

■

Théorème 3.4.5 *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Alors $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et on a*

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu. \tag{3.20}$$

Démonstration. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, il résulte immédiatement de la Proposition et la Définition 3.4.1 que $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Par ailleurs, on a

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \right| \leq \int f_+ d\mu + \int f_- d\mu = \int (f_+ + f_-) \, d\mu,$$

et comme $|f| = f_+ + f_-$, le théorème est démontré. ■

Proposition 3.4.6 *(Quelques propriétés)*

Pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, on pose

$$\|f\|_1 = \int |f| \, d\mu.$$

1) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ avec $\|f\|_1 = 0$ alors $f = 0$ presque partout.

2) Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, alors $f + g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Et aussi l'application $f \longmapsto \int f d\mu$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1(\mu)$. De plus,

$$\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \quad et \quad \|\alpha f\|_1 = \alpha \|f\|_1$$

3) Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $f \leq g$, alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$

4) Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $f = g$ presque partout, alors $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Démonstration. 1) Pour tout $n \geq 1$, posons

$$A_n = \left\{ x \in X : |f(x)| \geq \frac{1}{n} \right\} = |f|^{-1} \left(\left[\frac{1}{n}, +\infty \right] \right) \in \mathcal{M}$$

La suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est croissante avec

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

La continuité croissante de la mesure μ donne

$$\mu(A) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

D'après l'inégalité de Tchebychev, pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mu(A_n) \leq n \|f\|_1 = 0$$

Il s'ensuit que $\mu(A_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et par conséquent

$$\mu(A) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0.$$

Ceci prouve que f est nulle presque partout.

2) $f + g$ est mesurable et $|f + g| \leq |f| + |g|$ donc on a

$$\int |f + g| \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu < \infty.$$

Ce qui implique que $f+g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

En outre,

$$(f+g)_+ - (f+g)_- = f+g = f_+ - f_- + g_+ - g_-$$

Donc

$$(f+g)_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + (f+g)_-$$

Ainsi,

$$\int (f+g)_+ \, d\mu + \int f_- d\mu + \int g_- d\mu = \int f_+ d\mu + \int g_+ d\mu + \int (f+g)_- \, d\mu$$

Ce sont des intégrales finies donc

$$\begin{aligned}
\textstyle\int (f+g) \, d\mu &= \textstyle\int (f+g)_+ \, d\mu - \int (f+g)_- \, d\mu \\
&= \textstyle\int f_+ d\mu + \int g_+ d\mu - \int f_- d\mu - \int g_- d\mu \\
&= \textstyle\left(\int f_+ d\mu - \int f_- d\mu\right) + \left(g_+ d\mu - \int g_- d\mu\right) \\
&= \textstyle\int f d\mu + \int g d\mu
\end{aligned}$$

D'autre part, si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors αf est mesurable et

$$\int |\alpha f| \, d\mu = |\alpha| \int |f| \, d\mu < \infty$$

et donc $\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\|\alpha f\|_1 = \alpha \|f\|_1$.

Si $\alpha \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\textstyle\int \alpha f d\mu &= \textstyle\int (\alpha f)_+ \, d\mu - \int (\alpha f)_- \, d\mu \\
&= \textstyle\alpha \int f_+ d\mu - \alpha \int f_- d\mu \\
&= \textstyle\alpha \int f d\mu
\end{aligned}$$

Si $\alpha \leq 0$,

$$\begin{aligned}
\textstyle\int \alpha f d\mu &= \textstyle\int (\alpha f)_+ \, d\mu - \int (\alpha f)_- \, d\mu \\
&= \textstyle(-\alpha) \int f_- d\mu - (-\alpha) \int f_+ d\mu \\
&= \textstyle\alpha \int f d\mu
\end{aligned}$$

3) Comme pour les fonctions mesurables positives (Proposition 3.2.3).

4) Si $f = g$ presque partout, alors $f_+ = g_+$ presque par tout et $f_- = g_-$ presque partout, d'où

$$\int f_+ d\mu = \int g_+ d\mu \quad \text{et} \quad \int f_- d\mu = \int g_- d\mu$$

en vertu du Proposition 3.2.10. Il s'ensuit que $\int f d\mu = \int g d\mu$. ■