3.3 Application : Mesures à densité par rapport à une autre mesure

A partir d'une mesure et d'une fonction mesurable positive, on peut définir une autre mesure de la manière suivante.

Théorème 3.3.1 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ une fonction numérique mesurable positive. Définissons la fonction d'ensembles $\nu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$ par*

$$\nu(A) := \int_A f d\mu, \;\; A \in \mathcal{M} \tag{3.15}$$

Alors, ν est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$. On dit qu'elle est de densité f par rapport à μ.

Démonstration. Calculons $\nu(\phi)$ en appliquant la définition de ν,

$$\nu(\phi) = \int_\phi f d\mu = \int f \chi_\phi d\mu = \int 0 d\mu = 0.$$

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathcal{M}$, à termes deux à deux disjoints et A sa réunion.

$$\chi_A = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{A_n}.$$

Par le Corollaire 3.2.7 on obtient

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) &= \int f\chi_A d\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f\chi_{A_n}\right) d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int f\chi_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n). \end{aligned}$$

■

Exercice corrigé 3.3.2 *(Intégration par rapport à la mesure de comptage et de Dirac)*
1) Considérons $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ muni de la mesure de comptage μ et la fonction mesurable $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty]$. Calculer l'intégrale $\int f d\mu$.
2) Considérons l'espace mesurable $(X, \mathcal{P}(X))$ muni de la mesure de Dirac δ_a en point $a \in X$ et la fonction mesurable $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$. Calculer l'intégrale $\int f d\delta_a$.

Démonstration. 1) Puisque $\mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{n\}$, si ν est la mesure de densité f par rapport à μ, on a

$$\int f d\mu = \nu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{n\}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\{n\}} f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n).$$

2) Puisque $\delta_a(\{a\}) = 1$ et $\delta_a(\{a\}^c) = 0$, on a

$$\int f d\delta_a = \int_{\{a\}\cup\{a\}^c} f d\delta_a = \int_{\{a\}} f d\delta_a + \int_{\{a\}^c} f d\delta_a = f(a) \int_{\{a\}} d\delta_a + 0 = f(a).$$

Car $\delta_a(\{a\}^c) = 0$ implique que $\int_{\{a\}^c} f d\delta_a = 0$. ∎

Proposition 3.3.3 *(L'intégration par rapport à une mesure à densité)*
Soit ν la mesure de densité f par rapport à μ sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{M})$. Alors pour tout $g \in \mathcal{L}^0_+$ on a

$$\int g d\nu = \int f g d\mu \tag{3.16}$$

Démonstration. On commence par vérifier (3.16) pour les fonctions indicatrices $g = \chi_A$ avec $A \in \mathcal{M}$. En effet, par (3.2) et (3.4) on a

$$\int \chi_A d\nu = \nu(A) = \int_A f d\mu = \int f \chi_A d\mu.$$

Soit maintenant $g \in \mathcal{E}_+$ une fonction étagée positive mesurable de décomposition

$$g = \sum_{i=1}^{n} a_i . \chi_{A_i}$$

En utilisant successivement la définition de $\nu(A_i)$ on en déduit

$$\int g d\nu = \sum_{i=1}^{n} a_i \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \int \chi_{A_i} f d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} f d\mu = \int f g d\mu$$

Soit $g \in \mathcal{L}^0_+$ quelconque. Par la Proposition 2.3.11, il existe une suite $(g_n)_n$ croissante dans $\mathcal{E}_+$, convergeant vers g. Le produit fg_n est mesurable positif. La suite $(fg_n)_n$ est croissante car f est positive et $(g_n)_n$ est croissante et aussi $(fg_n)_n$ convergeant vers fg.

L'application du théorème de Beppo-Levi relativement à ν pour $(g_n)_n$ et à μ pour la suite $(fg_n)_n$ nous donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int g_n d\nu = \int g d\nu \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int fg_n d\mu = \int fg d\mu. \tag{3.17}$$

Comme $g_n \in \mathcal{E}_+$, elle vérifie (3.16),

$$\int g_n d\nu = \int fg_n d\mu, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3.18}$$

Les convergences (3.17) permettent de passer à la limite dans (3.18) pour conclure que g vérifie (3.16). ■

Proposition 3.3.4

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g \in \mathcal{L}^0_+$ deux fonctions mesurables positives. Si ν est la mesure de densité f par rapport à' μ, alors toute autre densité g de ν est égale à f μ-presque partout dans le cas ou ν est finie. Autrement dit, si

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu, \text{ pour tout } A \in \mathcal{M} \quad \text{et} \quad \int f d\mu < +\infty.$$

Alors, $f = g$ μ-presque partout.

Exercice corrigé 3.3.5 *Soit la suite des fonctions $f_n : (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par*

$$f_n(x) = \chi_{[0,n[}(x) \frac{1}{E(x)!},$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

1) Donner la limite simple de la suite $(f_n)_n$.

2) Calculer $\int \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x)$.

Démonstration. 1) Puisque la suite $([0, n[)_{n\geq1}$ est croissante et $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}[0, n[= \mathbb{R}_+$, par (1.2) on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \chi_{[0,n[}(x) = \chi_{\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}[0,n[}(x) = \chi_{\mathbb{R}_+}(x) = 1, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+.$$

Et donc

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{1}{E(x)!}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

2) La suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Les fonctions positives $x \mapsto f_n(x)$ sont décroissant alors mesurables. D'après le théorème de Beppo-Levi on a

$$\int \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) = \int \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) d\lambda(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n(x) d\lambda(x)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int f_n(x) d\lambda(x) &= \int_{[0,n[} \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) = \int_{\overset{n-1}{\underset{k=0}{\cup}} [k,k+1[} \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[k,k+1[} \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{[k,k+1[} \frac{1}{k!} d\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \lambda\left([k, k+1[\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\int \frac{1}{E(x)!} d\lambda(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

■