Chapitre 3

Fonctions intégrables

Dans tout ce chapitre, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ désigne un espace mesuré. Dans la suite on étudier l'intégrale de Lebesgue sur X par rapport à la mesure μ.

3.1 Intégrale d'une fonction étagée positive.

On note $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées positives mesurables de $(X, \mathcal{M})$ dans $\mathbb{R}_+$ muni de la tribu borélienne.

Définition 3.1.1 *Soit $f \in \mathcal{E}_+$, de décomposition canonique $f = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i}$. On pose*

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i.\mu(A_i) \tag{3.1}$$

Cette quantité s'appelle intégrale sur X de la fonction f par rapport à la mesure μ.

L'intégrale $\int f d\mu$ est un élément de $[0, +\infty]$. Bien que les a_i soient tous réels elle peut très bien valoir $+\infty$, si pour un $a_i > 0$, le correspondant $\mu(_{A_i})$ vaut $+\infty$. Rappelons la convention $0 \times (+\infty) := 0$ qui est bien utile ici lorsque $\mu\left(f^{-1}(\{0\})\right) = +\infty$.

Exemples 3.1.2 *1) Si f est une fonction constante, alors sa décomposition canonique s'écrit $f = a\chi_X$, avec $a \geq 0$. La formule (3.1) nous donne alors*

$$\int a d\mu = a.\mu(X).$$

2) Si $f = a\chi_A$ avec $a > 0$, $A \in \mathcal{M}$ et $A \neq X$, sa décomposition canonique est $f = a\chi_A + 0\chi_{A^c}$ d'où

$$\int a.\chi_A d\mu = a.\mu(A) + 0.\mu(A^c) = a.\mu(A).$$

Remarque 3.1.3 *Le cas particulier $a = 1$, dans 2) de l'exemple précédent est d'une grande utilité car il permet d'exprimer la mesure d'un ensemble sous la forme d'une intégrale*

$$\mu(A) = \int \chi_A d\mu, \text{ pour tout } A \in \mathcal{M} \tag{3.2}$$

Le lemme suivant sera utile pour prouver quelques propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$.

Lemme 3.1.4

L'intégrale d'une fonction étagée positive f ne dépend pas de la décomposition choisie pour f. C'est-à-dire, si $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m \in [0, +\infty[$ et $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m \in \mathcal{M}$ avec

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j.\chi_{B_j}.$$

Alors on a

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i.\mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j.\mu(B_j)$$

Proposition 3.1.5 *L'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ est homogène, additive et croissante, c'est-à-dire pour tout $f, g \in \mathcal{E}_+$ et $\alpha > 0$,*

i) $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$

ii) $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$

iii) Si $f \leq g$ alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu.$

Démonstration. i) Si $f = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i}$ et $\alpha > 0$, alors $\alpha f = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i.\chi_{A_i}$ et l'homogénéité est évidente. Dans ce cas particulier, il convient de remarquer que si $\int f d\mu = +\infty$, on a encore $0 \times \int f d\mu = 0 = \int (0 \times f) d\mu$ grâce à la convention $0 \times (+\infty) = 0$.

ii) Soit $f = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i}$ et $g = \sum_{j=1}^{m} b_j.\chi_{B_j}$, alors $f + g = \sum_{i=1}^{n} a_i.\chi_{A_i} + \sum_{j=1}^{m} b_j.\chi_{B_j}$ et donc

iii) Soit $f, g \in \mathcal{E}_+$ avec $f \leq g$ alors $g - f \in \mathcal{E}_+$ et $g = f + (g - f)$. Par ii) on a

$$\int g d\mu = \int f d\mu + \int (g-f) d\mu \geq \int f d\mu,$$

puisque $\int (g-f) d\mu \in [0, +\infty]$. ■

3.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive, convergence monotone et lemme de Fatou.

Nous notons $\mathcal{L}^0_+$ l'ensemble des fonctions $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ mesurables positives.

Définition 3.2.1 *Pour $f \in \mathcal{L}^0_+$ on appelle intégrale sur X de f par rapport 'à μ l'élément de $[0, +\infty]$ noté $\displaystyle\int f d\mu$ et défini par*

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int s d\mu : s \in \mathcal{E}_+, \ s \leq f \right\}. \tag{3.3}$$

Pour $A \in \mathcal{M}$ on définit aussi

$$\int_A f d\mu := \int f \chi_A d\mu \tag{3.4}$$

Remarque 3.2.2 *Si $f \in \mathcal{E}_+$ les deux définitions de l'intégrale de f par (3.1) et par (3.3) coïncident. En effet, notons $\displaystyle\int^{etag} f d\mu$ l'intégrale de f au sens de (3.1) et $\displaystyle\int^{mes} f d\mu$ celle au sens de (3.3). Pour toute $s \in \mathcal{E}_+$ telle que $s \leq f$, on a l'inégalité $\displaystyle\int^{etag} s d\mu \leq \int^{etag} f d\mu$, en vertu du a Proposition 3.1.5. Par conséquent dans (3.3) la borne supérieure est atteinte pour $s = f$, ce qui implique $\displaystyle\int^{etag} f d\mu = \int^{mes} f d\mu$.*

Cette intégrale possède la propriété de la croissance.

Proposition 3.2.3 *Pour toutes $f, g \in \mathcal{L}^0_+$, si $f \leq g$ alors $\displaystyle\int f d\mu \leq \int g d\mu$.*

Démonstration. Par l'inclusion

$$\{s \in \mathcal{E}_+, \ s \leq f\} \subset \{s \in \mathcal{E}_+, \ s \leq g\}$$

et par (3.3) on trouve $\displaystyle\int f d\mu \leq \int g d\mu$. ∎

Nous donnons maintenant le premier des grands théorèmes d'interversion limite-intégrale $(\lim \int = \int \lim)$.

Théorème 3.2.4 *(de la convergence monotone ou de Beppo-Levi)*
Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite croissante dans* $\mathcal{L}^0_+$ *et soit* $f = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n = \sup\limits_{n\geq 1} f_n$. *Alors*

$$\int f d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int f_n d\mu = \sup_{n\geq 1} \int f_n d\mu$$

Démonstration. L'appartenance de f à $\mathcal{L}^0_+$ a déjà été vue (Proposition 2.3.10). Par la proposition précédente (croissance de l'intégrale), la suite $\left(\int f_n d\mu\right)_{n\geq 1}$ est croissante dans $[0, +\infty]$, donc convergente vers $L \in [0, +\infty]$

$$L := \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int f_n d\mu = \sup_{n\geq 1} \int f_n d\mu$$

Pour tout $n \geq 1$ on a $f_n \leq f$ et par la croissance de l'intégrale on obtient $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$, puis en prenant le supremum sur $n \geq 1$,

$$L \leq \int f d\mu.$$

Par ailleurs, soit $s \in \mathcal{E}_+$ tel que $s \leq f$ et soit $\alpha \in]0, 1[$. On définit

$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha.s(x)\} \tag{3.5}$$

Comme $A_n = (f_n - \alpha.s)^{-1}([0, +\infty])$ et la fonction $x \longrightarrow f_n(x) - \alpha.s(x)$ est mesurable alors $A_n \in \mathcal{M}$ pour tout $n \geq 1$. D'autre part, la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est croissante car si $x \in A_n$, alors $\alpha.s(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ par croissance de $(f_n)_{n\geq 1}$, donc $x \in A_{n+1}$ et aussi on a $X = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$. Grâce a la définition de A_n on peut écrire une inégalité entre des fonctions mesurables positives,

$$\alpha.s.\chi_{A_n} \leq f_n \chi_{A_n} \leq f_n.$$

On en déduit par croissance de l'intégrale et (3.4),

$$\int_{A_n} (\alpha.s) d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu \tag{3.6}$$

De plus, si $s = \sum_{i=1}^{m} b_i.\chi_{B_i}$, alors $s.\chi_{A_n} = \sum_{i=1}^{m} b_i.\chi_{(B_i \cap A_n)}$ donc on a

$$\int_{A_n} s d\mu = \sum_{i=1}^{m} b_i.\mu(B_i \cap A_n). \tag{3.7}$$

Pour tout $i = 1, ..., m$, la suite $(B_i \cap A_n)_{n \geq 1}$ est croissante et

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_i \cap A_n = B_i \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) = B_i \cap X = B_i$$

Dans (3.7), on peut passer à la limite quand n tend vers $+\infty$, en appliquant la continuité croissante de la mesure μ

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{A_n} s d\mu = \sum_{i=1}^{m} b_i. \left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(B_i \cap A_n) \right) = \sum_{i=1}^{m} b_i \mu(B_i) = \int s d\mu.$$

Faisant tendre n vers l'infini dans (3.6) on obtient ainsi, pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et tout $s \in \mathcal{E}_+$ avec $s \leq f$ on a

$$\alpha \int s d\mu \leq L. \tag{3.8}$$

Dans (3.8), on prend d'abord le sup sur $\alpha \in]0, 1[$, puis le sup sur $\{s \in \mathcal{E}_+, \ s \leq f\}$ et on trouve

$$\int f d\mu \leq L.$$

■

Corollaire 3.2.5 *Si $(f_n)_{n \geq 1}$ est décroissante dans $\mathcal{L}^0_+$ et si $\int f_0 d\mu < \infty$ alors on a*

$$\int f d\mu = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int f_n d\mu,$$

où $f = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n$.

Démonstration. En appliquant le théorème de Beppo-Levi à la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ telle que $g_n = f_0 - f_n$. ■

Corollaire 3.2.6 *(homogénéité et additivité de l'intégrale dans $\mathcal{L}^0_+$)*
Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{L}^0_+$ et toute constante $\alpha \in [0, +\infty[$,
i) $\displaystyle\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$
ii) $\displaystyle\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$

Démonstration. i) Est une conséquence immédiate de la Définition 3.2.1 et de la Proposition 3.1.5 i)
ii) Il existent deux suites croissantes $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{E}_+$ telles que $f_n \longrightarrow f$ et $g_n \longrightarrow g$ simplement. La suite $(f_n + g_n)_{n\geq 1}$ est croissante dans $\mathcal{E}_+$ et converge simplement vers $f+g$. Or, pour tout $n \geq 1$,

$$\int (f_n + g_n) d\mu = \int f_n d\mu + \int g_n d\mu.$$

On obtient donc le résultat en passant à la limite grâce au théorème de Beppo-Levi. ■

Corollaire 3.2.7 *(Interversion série-intégrale dans $\mathcal{L}^0_+$)*
Soit $(f_k)_{k\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives. La fonction $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ est aussi dans $\mathcal{L}^0_+$ et

$$\int \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k\right) d\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int f_k d\mu\right) \qquad \textit{(L'égalité dans } [0,+\infty]) \tag{3.9}$$

Démonstration. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k$. Les applications $x \longmapsto S_n(x)$ sont dans $\mathcal{L}^0_+$ comme somme d'un nombre fini des applications dans $\mathcal{L}^0_+$. La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge et croissante (dans $[0, +\infty]$) vers S. Pour tout $n \geq 1$ on a

$$\int S_n d\mu = \sum_{k=0}^{n} \int f_k d\mu.$$

En prenant la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ et en utilisant le théorème de Beppo-Levi, on obtient le résultat. ■

Corollaire 3.2.8 *(Lemme de Fatou)*
Si $(f_n)_{n\geq 1}$ *est une suite dans* $\mathcal{L}_+^0$*, alors*

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty}\int f_n d\mu \geq \int \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\mu. \tag{3.10}$$

Démonstration. Posons $g := \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n$. Par définition de la limite inférieure,

$$g = \sup_{n\geq 1}\ \inf_{k\geq n} f_k.$$

Les fonctions $g_n := \inf_{k\geq n} f_k$ appartiennent à $\mathcal{L}_+^0$ et la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge en croissant vers g. Par le théorème de Beppo-Levi, on a donc

$$\int g_n d\mu \longrightarrow \int g d\mu = \int \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\mu \tag{3.11}$$

D'autre part, clairement pour tout $n \geq 1$, on a $g_n \leq f_n$ et donc

$$\int g_n d\mu \leq \int f_n d\mu, \text{ pour tout } n \geq 1. \tag{3.12}$$

Nous ne savons pas si le second membre de (3.12) a une limite quand n tend vers l'infini, mais par contre sa limite inférieure existe toujours. On peut ainsi passer à la limite inférieure dans (3.12), ce qui donne par conservation de l'inégalité large,

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty}\int g_n d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty}\int f_n d\mu \tag{3.13}$$

Par (3.11), on sait que la limite inférieure du premier membre de (3.13) est en fait une limite et vaut

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty}\int g_n d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int g_n d\mu = \int \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\mu,$$

d'ou la conclusion. ∎

Lemme 3.2.9
Soit $f \in \mathcal{L}_+^0$ *et* $A \in \mathcal{M}$ *avec* $\mu(A) = 0$*. Alors* $\int_A f d\mu = 0$

Proposition 3.2.10 *(Quelques propriétés de l'intégrale)*
Soit $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive.
*1) (Inégalité de Tchebychev)***.** *Pour tout nombre réel $a > 0$ on a*

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int f d\mu \tag{3.14}$$

2) $\int f d\mu = 0$ si et seulement si $f = 0$ presque partout.
3) Si $\int f d\mu < \infty$ alors $f < \infty$ presque partout.
4) Si $f, g \in \mathcal{L}^0_+$ telles que $f = g$ presque partout. Alors $\int f d\mu = \int g d\mu$.

Démonstration. 1) Considérons l'ensemble

$$A = \{x \in X : f(x) \geq a\} = f^{-1}([a, +\infty]) \in \mathcal{M}.$$

On remarque que la fonction étagée $a.\chi_A$ vérifie l'inégalité $\varphi = a.\chi_A \leq f$, en effet, si $x \in A$ on a $f(x) \geq a = \varphi(x)$ et si $x \notin A$ on a $\varphi(x) = 0 \leq f(x)$. Il résulte que

$$a.\mu(A) = \int \varphi d\mu \leq \int f d\mu.$$

2) Si $f = 0$ presque partout, alors $\mu(A) = 0$ avec $A = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ (donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in A^c$). Par l'additivité de l'intégrale et le Lemme 3.2.9, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int f d\mu &= \int f\chi_X d\mu = \int f(\chi_A + \chi_{A^c}) d\mu = \int f\chi_A d\mu + \int f\chi_{A^c} d\mu \\
&= \int_A f d\mu + \int_{A^c} f d\mu = 0 + \int_{A^c} 0 d\mu = 0.
\end{aligned}$$

Inversement, supposons que $\int f d\mu = 0$. Pour tout $n \geq 1$ on pose

$$A_n = \left\{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

Alors $A_n \in \mathcal{M}$ pour tout $n \geq 1$ car $A_n = f^{-1}(\left[\frac{1}{n}, +\infty\right])$, la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est croissante et on a

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \{x \in X : f(x) > 0\} = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Par ailleurs, par 1), pour tout $n \geq 1$ on a

$$\mu(A_n) \leq n \int f d\mu = 0.$$

Ainsi, par la continuité croissante , on en déduit que

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) \neq 0\}\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n) = 0,$$

d'où le résultat.

3) Pour tout $n \geq 1$,

$$\{x \in X : f(x) = +\infty\} \subset \{x \in X : f(x) \geq n\}.$$

Si l'intégrale de f est finie, on applique l'inégalité de Tchebychev avec $a = n \geq 1$ pour obtenir

$$\mu\{x \in X : f(x) = +\infty\} \leq \mu\{x \in X : f(x) \geq n\} \leq \frac{1}{n} \int f d\mu \longrightarrow 0.$$

Donc $\mu\{x \in X : f(x) = +\infty\} = 0$.

4) Soit $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. On a $\mu(A) = 0$. II en résulte que

$$f\chi_A = 0 \text{ presque partout} \quad \text{et} \quad g\chi_A = 0 \text{ presque partout.}$$

Comme $f\chi_{A^c} = g\chi_{A^c}$, on obtient en appliquant le Lemme 3.2.9,

$$\begin{aligned}
\int f d\mu &= \int f\chi_X d\mu = \int f(\chi_A + \chi_{A^c}) d\mu = \int f\chi_A d\mu + \int f\chi_{A^c} d\mu \\
&= \int f\chi_{A^c} d\mu = \int g\chi_{A^c} d\mu = \int g\chi_A d\mu + \int g\chi_{A^c} d\mu \\
&= \int g(\chi_A + \chi_{A^c}) d\mu = \int g d\mu.
\end{aligned}$$

■