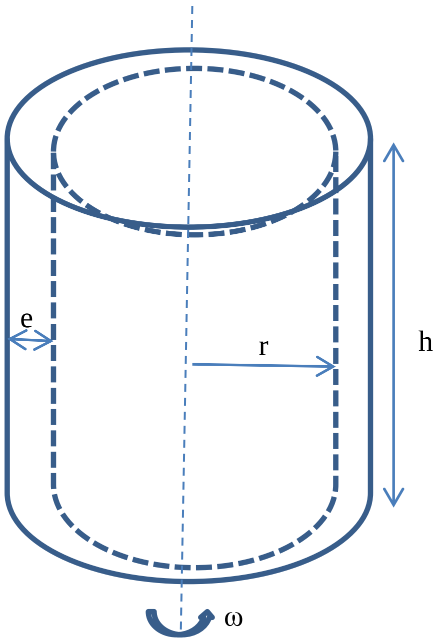
Chapitre 3

Dynamique des fluides

La dynamique des fluides réels ou visqueux est l'étude de l'écoulement en tenant compte de toute les forces qui s'appliquent à la particule fluide. La viscosité du fluide qui se manifeste comme une résistante au mouvement de glissement d'une couche de particules fluides par rapport à une autre en engendrant des forces de frottement dont on déterminera l'expression plus loin.

I - La viscosité - Expérience de Couette

On considère 2 cylindres coaxiaux, de rayons peu différents, dont l'espace intermédiaire est rempli de fluide



Expérience de Couette

En entrainant le cylindre extérieur avec une vitesse angulaire constante ω, on constate que le cylindre intérieur a tendance à tourner dans le même sens. Pour le maintenir immobile. Il faut donc lui appliquer un couple de sens opposé.

La distance e entre les 2 cylindres étant petite devant r, on schématise l'expérience en considérant un plan mobile (P') se déplaçant parallelement à un plan fixe (P) parallele à ox de surface

$S = 2\pi rh$, avec la vitesse $V = \omega r$.

La distance séparant les plans (P) et (P') est e.

Une force de frottement s'applique sur (P) qui, pour des vitesses modérées, reste proportionnelle à : SV/e soit F=μSV/e

La contrainte qui est une force par unité de surface : $\tau = \mu \frac{V}{e}$

$$\frac{V}{e} \sim \frac{du}{dy} \qquad \textit{est le gradient de vitesse entre les 2 plans}$$

L'expérience de couette permet de calculer la viscosité dynamique du fluide µ ce qui justifie l'appellation de viscosimètre de Couette.

Le moment du couple de frottement est :

$C = rS\tau = rS\mu \frac{V}{e}$

D'où $\mu = \frac{Ce}{r2\pi rh\omega r} = \frac{Ce}{2\pi r^3 \omega h}$ (Kg.m.s^{-1} ou pa.s)

La viscosité cinématique : $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ (m/s^{-2})

II - Contraintes et déformations dans les milieux continus

II-1 Tenseur des taux de déformations

Le mouvement général d'une particule fluide peut être ramené à trois mouvements élémentaires.

Translation - Rotation - Déformation angulaire - dilatation

Le tenseur des taux de déformations s'écrit :

$$\overline{\overline{D}} = [D_{ij}] = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & d_{xz} \\ d_{yx} & d_{yy} & d_{yz} \\ d_{zx} & d_{zy} & d_{zz} \end{bmatrix}$$

Ou chaque composante s'écrit : $d_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right]$

II – 2 Forces de surface. Tenseur des contraintes

Nous considérons ici les forces qui s'exercent au sein d'un fluide avec pour objectif de développer une analyse des forces qui interviennent au « second membre » de l'équation de conservation de laquantité de mouvement. Deux types de forces agissent sur le fluide contenu dans un volume matériel V(t) limité par la surface S(t) :

- les forces de volume que l'on peut exprimer sous la forme : $\int_{V(t)} \rho g dV$
- les forces de surface qui agissent par l'intermédiaire de la surface S(t) : $\int_{S(t)} dF$

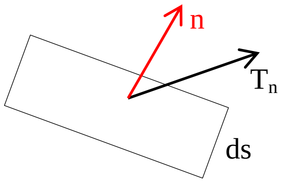
Les forces s'exerçant sur le volume sont facilement prises en compte. Une étude plus détaillée est nécessaire pour comprendre la nature des forces de surface.

Pour un fluide réel (visqueux) en mouvement, les forces de surface ne sont plus seulement normales à la surface : il existe des contraintes tangentielles dues à la viscosité (frottements).

En un point M d'une surface dS, la force de surface s'exprime comme : $\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{T_n} dS$

Ou **T_n** est le vecteur contrainte qui s'exerce sur la surface de normale **n**

.



$\overrightarrow{T_n} = \bar{\bar{\sigma}}.\vec{n}$ *ou* $\bar{\bar{\sigma}}$ *est le tenseur des contraintes*

On peut décomposer le tenseur σ en la somme de 2 tenseurs :

$\bar{\bar{\sigma}} = -p\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}}$

Où $\bar{\bar{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *et* $\bar{\bar{\tau}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$

En notation indicielle ses composantes sont : $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$

D'où :

$\overrightarrow{dF} = -p.\vec{n}dS + \bar{\bar{\tau}}.\vec{n}dS$

La pression agit de façon isotrope et sa valeur ne dépend que de l'état thermodynamique du fluide. Les contraintes visqueuses sont au contraire essentiellement liées à l'état de déformation du fluide.

III - Équation de mouvement des fluides réels

Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\frac{D\rho\vec{v}}{Dt} = \overrightarrow{div}\,\bar{\bar{\sigma}} + \rho\vec{g}$$

Où σ représente le tenseur des contraintes totales. Ce bilan des forces peut être ré-écrit :

$$\frac{D\rho\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}p + \overrightarrow{div}\bar{\bar{\tau}} + \rho\vec{g}$$

La signification physique de cette équation apparaît clairement :

$$\begin{Bmatrix} \textit{Acceleration} \\ \textit{par unité de volume} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \textit{Forces associées à} \\ \textit{la pression par unité} \\ \textit{de volume} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \textit{Contraintes visqueuses} \\ \textit{par unité de volume} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \textit{Force de volume} \\ \textit{par unité de volume} \end{Bmatrix}$$

C'est une équation locale, valable à chaque instant en tout point du fluide, dont les différents termes sont des forces par unité de volume qui s'expriment en N/m^3.

.Le bilan de quantité de mouvement, lorsque le fluide est incompressible et newtonien de viscosité constante, porte le nom d'équation de Navier-Stokes :

$$\bar{\bar{\tau}} = 2\mu\bar{\bar{D}} \qquad donc\ \tau_{ij} = 2\mu d_{ij}$$

Car : $div\,\vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 = d_{11} + d_{22} + d_{33}$

On rappelle que ce tenseur est symétrique : $d_{ij} = d_{ji}$

Or $\overrightarrow{div}\bar{\bar{D}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{div}\left(\overline{\overline{grad}}\vec{v} + \overrightarrow{grad}^T\vec{v}\right) = \frac{1}{2}\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{2}\overrightarrow{grad}(\overrightarrow{div v}) = \frac{1}{2}\,\Delta\vec{v} \quad (\,car\ div\vec{v} = 0)$

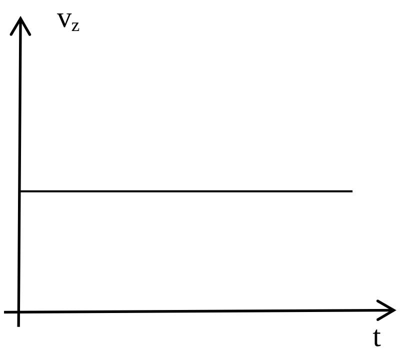
$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu\Delta\vec{v} + \rho\vec{g}$$

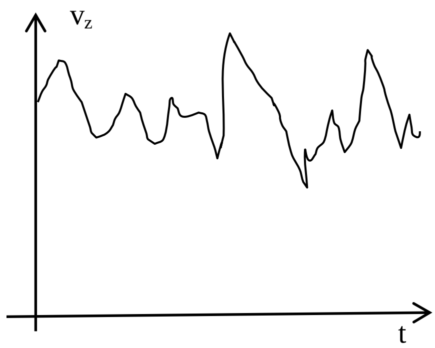
III- Régimes d'écoulement :

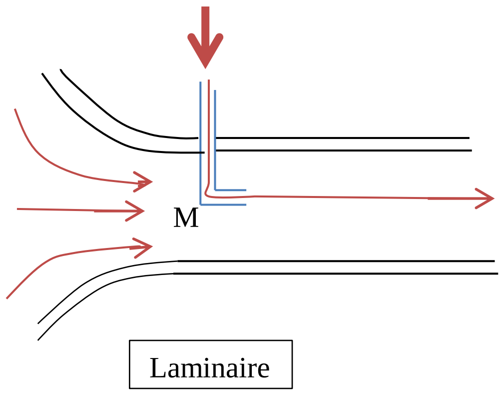
Étudier l'écoulement d'un fluide réel revient à résoudre l'équation de Navier-Stokes. Mais en pratique, cette équation ne peut se résoudre analytiquement qu'en posant des hypothèses simplificatrices. Notamment, on distingue deux grands types d'écoulement : le **régime laminaire** et le **régime turbulent** entre les deux une phase de **transition**.

On dit qu'un écoulement est laminaire lorsque le mouvement des particules fluides se fait de façon régulière et ordonnée. L'écoulement est turbulent lorsque le déplacement est irrégulier et que des fluctuations aléatoires de vitesse se superposent au mouvement moyen du fluide.
L'une des premières analyses de la transition d'un régime laminaire vers la turbulence est basée sur des observations d'écoulements en conduit cylindrique effectuées par Reynolds en 1883.

Le montage expérimental comporte un réservoir de liquide sous pression débouchant sur un conduit cylindrique. Un tube mince permet l'injection de colorant. Lorsque l'écoulement est laminaire, le filet de colorant reste mince, régulier et parallèle à la paroi du cylindre. En écoulement turbulent, le colorant est rapidement dispersé. Dans cette situation, une mesure de la composante de vitesse axiale montre que celle-ci fluctue de façon aléatoire dans l'espace et dans le temps.

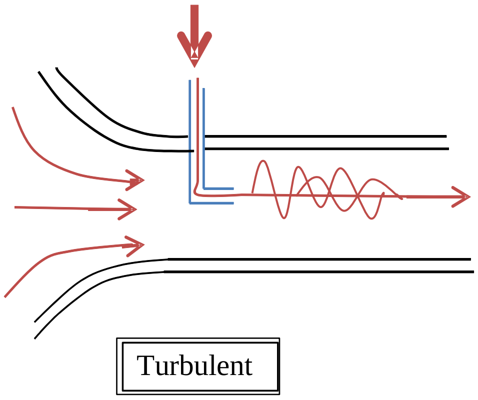






$$\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y + v_z\vec{e}_z$$

En un point M $\begin{cases} v_x = v_y = 0 \\ \vec{v} = v_z\vec{e}_z \end{cases}$



En un point M

$\{v_x(t) et\ v_y(t) \ll v_z(t)$

$$\langle v_x\rangle_t = \langle v_y\rangle_t = 0$$

Reynolds a étudié les écoulements en fonction des différents paramètres à savoir la viscosité du fluide, le diamètre de la conduite et la vitesse moyenne. Il a montré que le régime de l'écoulement ne dépendait pas de chaque paramètre séparément mais d'une grandeur sans dimension qui les réunissait tous : le nombre de **Reynolds**

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{vD}{\nu}$$

On constate généralement que la transition d'un régime laminaire à un régime turbulent s'effectue lorsque Re ≈ 2000 = Rec, nombre de Reynolds critique. Pour Re < 2000, l'écoulement reste laminaire et une perturbation localisée introduite dans l'écoulement est progressivement dissipée. Dans un intervalle de Re de 2000 à 3000, des « paquets » turbulents apparaissent dans le conduit de façon intermittente. Aux nombres de Reynolds plus élevés, l'écoulement devient turbulent dans son ensemble ; c'est-à-dire que les forces de viscosité ne sont plus suffisantes pour empêcher les inévitables perturbations d'engendrer des tourbillons qui se superposent à l'écoulement global.

IV – Perte de charge :

On distingue deux types de perte de charge :

- perte de charge singulière : C'est une diminution de la pression totale due aux singularités ou changements de forme de la conduite comme les élargissements, les retressissements, les vannes, les coudes..etc…..

$$(\Delta p_t)_s = K\frac{1}{2}\rho v^2$$

où le coefficient de perte de charge K, qui dépend de la géométrie et du nombre de Reynolds, est donné dans des formulaires appelés « dictionnaires de pertes de charge ».

- perte de charge régulière : C'est une perte de pression totale due aux frottements entre les couche du fluide

$$(\Delta p_t)_r = \lambda\frac{L}{D}\frac{\rho v^2}{2}$$

Pour un écoulement laminaire en conduite : $\lambda = \frac{64}{Re}$

En régime turbulent : $\lambda = f\left(Re, \frac{\varepsilon}{D}\right)$

ε est d'un ordre de grandeur comparable à la hauteur géométrique moyenne des aspérités de cette paroi. Typiquement pour un tuyau en acier neuf ε = 0,03 à 0,1 mm.