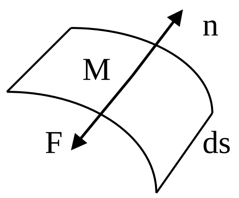
Chapitre 2
STATIQUE DES FLUIDES

La statique des fluides est l'étude des conditions d'équilibre des fluides au repos. Nous ne distinguerons pas le cas des fluides réels (c'est-à-dire visqueux) et celui des fluides parfaits ; le phénomène de viscosité n'a d'influence que lorsque les particules sont en mouvement, ce qui n'est pas le cas en statique des fluides.

I-Pression en un point d'un fluide

Dans un fluide au repos, la pression désigne la force par unité de surface qui s'exerce perpendiculairement à un élément de surface ds.

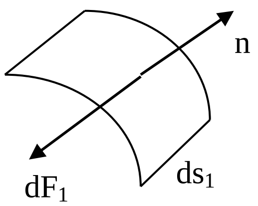


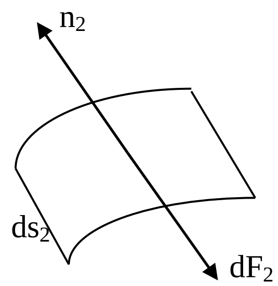
$$\overrightarrow{dF} = -p.\vec{n}.ds$$

dF : Force exercée sur l'élément de surface ds

p : pression qui règne au point M

La force de pression agit toujours vers l'intérieur du volume délimité par l'élément de surface
La pression est indépendante de la surface et de l'orientation de cette surface.





$\overrightarrow{dF_1} = -p_1\overrightarrow{n_1}ds_1$

$\overrightarrow{dF_2} = -p_2\overrightarrow{n_2}ds_2$

$\overrightarrow{dF_1} \neq \overrightarrow{dF_2}$

Mais $p_1 = p_2 = p(M)$

- **La pression s'exprime en :**

- Pascal (pa) : unité SI (N/m^2)
- Le bar (bar) et son sous multiple le millibar (mbar)
- Le millimètre de mercure ou Torr
- L'atmosphère (atm)

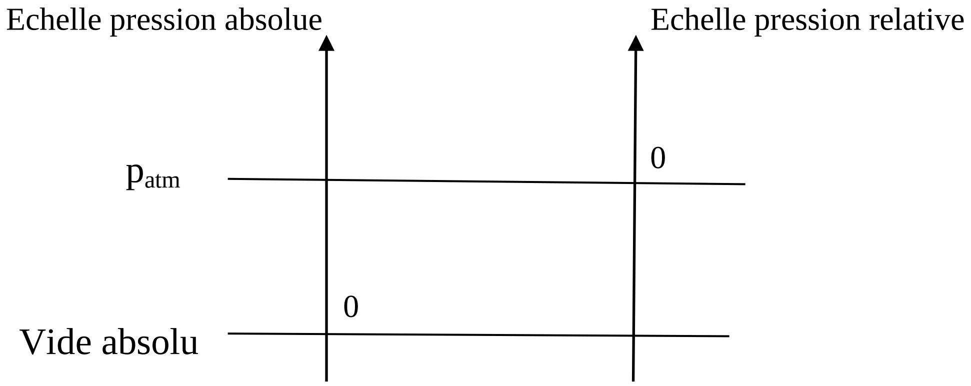
1 atm =1 .0135*10^5 pa =750 mm de mercure
1 bar = 10^5 pa

	Pascal (pa)	Bar	Atmosphere
Pascal	**1**	**10^{-5}**	**$9.869\ 10^{-6}$**
Bar	**10^{5}**	**1**	**0.987167**
Kgf/cm^2	**98039**	**0.9803**	**0.968**
Atmosphere	**101325**	**1.0133**	**1**
Cm d'eau	**98.04**	**$980\ 10^{-6}$**	**$968\ 10^{-6}$**
mm de Hg	**133**	**$1.333\ 10^{-3}$**	**$1.316\ 10^{-3}$**
mbar	**10^{2}**	**10^{-3}**	**$987\ 10^{-6}$**

- ## Pression absolue et pression relative

La pression absolue est la pression mesurée par rapport au vide absolu (c'est-à-dire l'absence totale de matière). Elle est toujours positive.

La pression relative se définit par rapport à la pression atmosphérique existant au moment de la mesure :



$$p_{absolue} = p_{relative} + p_{atmosphérique}$$

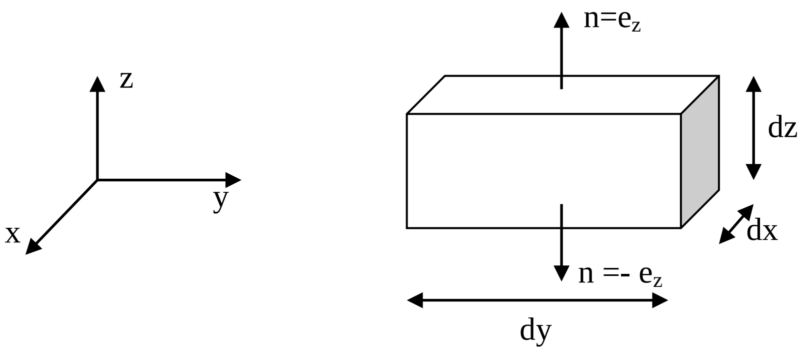
- ## Mesure de la pression :

Les instruments de mesure de la pression sont multiples :

- Les baromètres
- Les manomètres à tube en U
- Les piézomètres

II- Principe fondamental de la statique

On considère un élément de volume fluide parallélépipédique de volume dV=dx dy dz



Faire le bilan des forces qui s'appliquent sur cet élément de volume impose de distinguer :
- Les forces de volume : le poids
- Les forces de surface : les forces de pression

La force de volume : $\overrightarrow{dp} = dm\vec{g} = \rho dV\vec{g}$

La force de surface : $\overrightarrow{dF} = dF_x\overrightarrow{e_x} + dF_y\overrightarrow{e_y} + dF_z\overrightarrow{e_z}$

Puisqu'ici les forces de surface sont nécessairement normales. Le module de la composante suivant oz

$$dF_z = [p(z) - p(z + dz)]dxdy$$

Par un développement au premier ordre on a :

$$p(z + dz) = p(z) + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

D'où $dF_z = -\frac{\partial p}{\partial z}dx\,dy\,dz = -\frac{\partial p}{\partial z}dV$

Et par analogie sur les deux autres axes :

$$dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x}dV$$

$$dF_y = -\frac{\partial p}{\partial y}dV$$

La force de surface se résume alors à :

$$\overrightarrow{dF} = -\left[\frac{\partial p}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial p}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial p}{\partial z}\overrightarrow{e_z}\right]dV$$

$\overrightarrow{dF} = -\overrightarrow{grad}\, p$ dV

Au total on a : $\overrightarrow{dp} = \rho dV\vec{g}$ $\quad et \quad$ $\overrightarrow{dF} = -\overrightarrow{grad}\, p\, dV$

D'après le principe fondamental de la dynamique, l'ensemble des forces agissant sur la particule fluide équivaut au produit de sa masse par son accélération :

$\overrightarrow{dp} + \overrightarrow{dF} = \rho dV\vec{a}$

et en projetant

$\rho dVg - grad\, p\, dV = \rho dVa$

D'où $\quad \rho g - grad\, p = \rho a$

Fluide au repos $\quad \vec{a} = \vec{0}$ $\quad$ donc :

$\overrightarrow{grad}\, p = \rho\vec{g}$

Projection :

$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$

On déduit de ces trois équations que :

$p(x, y, z) = p(z)$

Donc on a l'équation $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$: C'est l'équation différentielle à résoudre pour connaitre la pression en tout point d'un fluide au repos.

III- Application aux fluides incompressibles

Un fluide est dit incompressible si sa masse volumique est en tout point la même

$\rho = constante \qquad et \qquad g = constante$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

On intègre : $p(z) = \int \frac{dp}{dz} dz = -\int \rho g dz = -\rho g \int dz = -\rho g z + constante$

Soit $p(z) + \rho g z = constante$

C'est l'équation fondamentale de la statique

En $z=z_0$ $\quad p=p_0$ $\quad$ donc $\quad p_0 + \rho g z_0 = constante$

D'où $\quad p(z) = p_0 + \rho g(z - z_0) = p_0 + \rho g h$

Si on prend la pression atmosphérique comme référence on aura :

$p = p_{atm} + \rho g h$

IV- Application aux fluides compressibles : cas des gaz parfaits

L'équation d'état d'un gaz parfait :

$pV = nRT \qquad soit\ p = \frac{nRT}{V}$

Or $\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} \qquad d'$où $\frac{n}{V} = \frac{\rho}{M}$

M : masse molaire du gaz d'où $p = \rho\frac{RT}{M} \qquad \rho = \frac{M}{RT}p$

$\frac{dp}{dz} = -\rho(p)g = -\frac{M}{RT}pg$

Donc $\frac{dp}{p} = -\frac{M}{RT}gdz$

Par intégration : $p(z) = p_0 exp\left[-\frac{M}{RT}g(z - z_0\right]$, $p = p_0\ en \quad z = z_0$

V-Les conséquences de la relation fondamentale de la dynamique

1- Les surfaces d'égales pression ou isobares sont des plans horizontaux.

2- La différence de pression entre deux pris dans un fluide au repos ne dépend que de la distance verticale qui sépare les sépare et elle est égale au poids d'une colonne de fluide de hauteur h et de section égale à l'unité.

3- La surface de séparation entre deux fluides non miscibles est un plan horizontale.

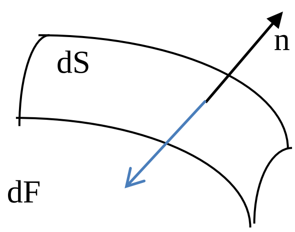
4- Dans un fluide au repos, la variation de pression est transmise intégralement et simultanément c'est le principe de Pascal.

Application du principe de Pascal : la presse hydraulique (voir TD)

VI- Forces hydrostatiques

On s'intéresse à la détermination des forces s'exerçant sur des surfaces solides immergées :

On sait que $\overrightarrow{dF} = -p\vec{n}dS$



La force totale s'exerçant sur la surface S

$\vec{F} = \int -\boldsymbol{p}.\vec{\boldsymbol{n}}.\boldsymbol{dS}$

VI-1 Cas particulier d'une plaque plane

$\overrightarrow{\boldsymbol{dF}} = -p.\vec{\boldsymbol{n}}.dS$ Où $p = p_0 + \rho g h$

Donc La résultante $\vec{F} = \int -p.\vec{\boldsymbol{n}}.dS$

$\vec{\boldsymbol{F}} = -\vec{\boldsymbol{n}}\int (p_0 + \rho g h)\, dS$

$\vec{\boldsymbol{F}} = -\vec{\boldsymbol{n}}\left(p_0 S + \rho g \int h\, dS\right)$

$avec \quad \int h dS = h_G S$

$h_G : profondeur\ du\ barycentre\ de\ la\ surface$

Par conséquent : $\vec{\boldsymbol{F}} = -\vec{\boldsymbol{n}} S(p_0 + \rho g h_G)$ $\boldsymbol{h_G} = \frac{\boldsymbol{h_1}+\boldsymbol{h_2}}{\boldsymbol{2}}$

Remarque : Si on néglige l'épaisseur de la plaque, une force de direction opposée mais de même intensité s'applique sur la face opposée.
La résultante des forces de pression s'exerçant sur la plaque est donc nulle.

IV-2 cas d'une paroi plane

$\overrightarrow{\boldsymbol{F_1}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{p_0} + \boldsymbol{\rho g h_G})$

$\overrightarrow{\boldsymbol{F_2}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}}\boldsymbol{S p_0}$

La pression atmosphérique s'applique de part et d'autre de la paroi.

$\vec{\boldsymbol{F}} = \overrightarrow{\boldsymbol{F_1}} + \overrightarrow{\boldsymbol{F_2}}$

$\vec{\boldsymbol{F}} = -\boldsymbol{\rho g h_G S}\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}$

Ou bien

$\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{\rho g h_G S}\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}}$ $\mathbf{h_G}$ étant la profondeur à laquelle se trouve le centre de gravité

VII- Force exercée sur un corps immergé – Poussée d'Archimède :

<u>Enoncé du théorème d'Archimède</u> : Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force verticale dirigée vers le haut et dont le module est égal au poids du fluide déplacé.

$\vec{\boldsymbol{F}} = -\boldsymbol{\rho_0 V_{imm}}\vec{\boldsymbol{g}}$

$\vec{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{\rho_c V_c}\vec{\boldsymbol{g}}$

ρ_0 : masse volumique du fluide
ρ_c : masse volumique du corps
V_{imm} : volume de la partie immergée (plongée)