
Espaces vectoriel - Applications linéaires

Exercice1 : Soit $E = IR^3$ un espace vectoriel sur IR

Les ensemble suivants sont –ils des sous-espace vectoriels de E ?

$A = \{(x, y, z) \in IR^3 / x + y + z = a, a \in IR\}$,

$B = \{(x, y, z) \in IR^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Exercice 2 :

1. Ecrire le vecteur $v = (1,-2,5)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3)$, $v_3 = (1,-1,1)$.
2. Pour quelle valeur de $k \in IR$ le vecteur $v = (1,-2,k)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $u = (3,0,2)$, $w = (2,-1,-5)$.

Exercice 3 : Déterminer si les vecteurs suivants sont linéairement indépendants.

1) $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (1,-3,2)$, $v_3 = (2,-1,-5)$,

2) $u_1 = (1,-2,1)$, $u_2 = (2,1,-1)$, $u_3 = (7,-4,1)$,

3) $w_1 = (2,-3,7)$, $w_2 = (0,0,0)$, $w_3 = (3,-1,-4)$,

Exercice 4 : On considère dans un espace vectoriel des fonctions numériques sur IR les trois fonctions $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \cos^2 x$.

Montrer que les fonctions f_0, f_1, f_2 sont linéairement indépendantes.

Exercice 5 : 1) Montrer que les vecteurs $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3)$, $v_3 = (2,-1,1)$ engendrent IR^3.

2) Constituent-ils une base de IR^3 ?

Exercice 6 : Soit E un sous-espace vectoriel de IR^3 engendré par les vecteurs suivants : $w_1 = (2,1, 3)$, $w_2 = (1, 2, 0)$, $w_3 = (-1,1,-3)$,

Déterminer une base de E et $\dim E$.

Exercice 7 : 1) Montrer que les applications suivantes sont linéaires.

2) Déterminer le noyau et l'image ainsi que leurs dimensions de ces applications :

a) $\begin{array}{l} f : IR^3 \to IR^2 \\ (x, y, z) \to (x + y, y + z) \end{array}$,

b) $\begin{array}{l} f : IR^3 \to IR^3 \\ (x, y, z) \to (x + 2y, y - z, x + 2z) \end{array}$,