توزيعات المعاينة: Sampling Distributions

نفرض أننا أخذنا عينه حجمها n من مجتمع ما، ثم سحبنا منها بعض المقاييس الإحصائية مثل المتوسط الحسابي، التباين،... فإن كل مقياس من هذه المقاييس يعتبر متغير عشوائي في ذاته يختلف من عينه إلى أخرى – هذا المتغير العشوائي يخضع لتوزيع معين – هذا التوزيع يسمى بتوزيع العينة. فمثلاً نقول أن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي وهوعبارة عن توزيع جميع المتوسطات الحسابية للعينات المأخوذة من نفس هذا المجتمع ذات الحجم n، وكذلك فإن توزيع المعاينة للتباين هوتوزيع جميع التباينات المحسوبة من عينات لها نفس الحجم n ومأخوذة من نفس المجتمع، وهكذا....

توزيعات المعاينة للأوساط: Sampling Distributions of Means

أولا: متوسط $\bar{X}$: (متوسط توزيع المعاينة للمتوسطات $\mu_{\bar{X}}$)

نظرية:

إذا كانت X متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما و $\bar{X}$ متغيرة عشوائية تمثل متوسط عينة مسحوبة من هذا المجتمع بالإرجاع أو بدون إرجاع فإن: $E\left(\bar{X}\right)=\mu_{\bar{X}}=\mu_X$

حيث: $E\left(\bar{X}\right)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_x=\frac{1}{n}n\mu_X=\mu_X$

ملاحظة:

- إذا سحبنا جميع العينات من الحجم n من مجتمع ما حجمه N فإنه وبالضرورة سنجد أن متوسط المجتمع يكون مساويا لمتوسط متوسطات العينات المسحوبة منه بإرجاع أو بدون إرجاع.
- إذا سحبنا عينة من مجتمع ما فإننا نتوقع أن يكون متوسط العينة مساوي لمتوسط المجتمع، لذلك يستخدم متوسط العينة لتقدير متوسط المجتمع إذا كان هذا الأخير مجهولا، ونكتب: $\hat{\mu}_X=\bar{X}$ ونقول إن الإحصائية $\bar{X}$ هي مقدرة لمعلمة متوسط المجتمع μ_x.

مثال: إذا كان لدينا مجتمع يتكون من المفردات التالية: 1.2.3.4.5 وسحبنا جميع العينات العشوائية البسيطة من الحجم 2 التي يمكن سحبها من هذا المجتمع في الحالتين مع أو بدون إرجاع.

- أوجد توزيع المعاينة للوسط الحسابي وأحسبه في الحالتين مع أو بدون إرجاع.

الحل:

الوسط الحسابي للمجتمع هو: $\mu_x = \frac{\sum X_i}{N} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$

الحالة الأولى: توزيع المعاينة للوسط الحسابي وحسابه في حالة السحب مع الارجاع

عدد العينات الممكنة سحبها إذا كان السحب بإرجاع هي : $N^n = 5^2 = 25$

نوجد أولاً جميع العينات الممكنة في هذه الحالة، ثم نحسب الوسط الحسابي لكل عينة كما يلي:

العينة	$\bar{X}$	العينة	$\bar{X}$	العينة	$\bar{X}$	العينة	$\bar{X}$	العينة	$\bar{X}$
(1.1)	1	(2.1)	1.5	(3.1)	2	(4.1)	2.5	(5.1)	3
(1.2)	1.5	(2.2)	2	(3.2)	2.5	(4.2)	3	(5.2)	3.5
(1.3)	2	(2.3)	2.5	(3.3)	3	(4.3)	3.5	(5.3)	4
(1.4)	2.5	(2.4)	3	(3.4)	3.5	(4.4)	4	(5.4)	4.5
(1.5)	3	(2.5)	3.5	(3.5)	4	(4.5)	4.5	(5.5)	5

توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينات $\bar{X}$ هو:

$\bar{X}$	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$f(\bar{x})$	1/25	2/25	3/25	4/25	5/25	4/25	3/25	2/25	1/25

متوسط التوزيع العيني لـ $\bar{X}$:

$$\mu_{\bar{X}} = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = (1*\frac{1}{25}) + (1.5*\frac{2}{25}) + ... + (4.5*\frac{2}{25}) + (5*\frac{1}{25}) = 3 = \mu_x$$

وهو يساوي نفس قيمة μ_x كما يجب أن يكون.

الحالة الثانية: توزيع المعاينة للوسط الحسابي وحسابه في حالة السحب بدون الارجاع

عدد العينات الممكنة سحبها إذا كان السحب بإرجاع هي:

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{20}{2} = 10$$

نوجد أولاً جميع العينات الممكنة في هذه الحالة، ثم نحسب الوسط الحسابي لكل عينة كما يلي:

العينة	$\bar{X}$	العينة	$\bar{X}$	العينة	$\bar{X}$	العينة	$\bar{X}$	العينة	$\bar{X}$
(1.2)	1.5	(1.4)	2.5	(2.3)	2.5	(2.5)	3.5	(3.5)	4
(1.3)	2	(1.5)	3	(2.4)	3	(3.4)	3.5	(4.5)	4.5

توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينات $\bar{X}$ هو:

$\bar{X}$	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
$f(\bar{x})$	1/10	1/10	2/10	2/10	2/10	1/10	1/10

متوسط التوزيع العيني لـ $\bar{X}$:

$$\mu_{\bar{X}} = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = (1.5*\frac{1}{10}) + (2*\frac{1}{10}) + (2.5*\frac{2}{10}) + (3*\frac{2}{10}) + (3.5*\frac{2}{10}) + (4*\frac{1}{10})$$

$$+(4.5*\frac{1}{10}) = \frac{30}{10} = 3 = \mu_x$$

ثانيا: تبايــن $\bar{X}$:(تباين توزيع المعاينة للمتوسطات $\delta_{\bar{x}}^2$)

نظرية:

إذا كانت X متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما حجمه N و $\bar{X}$ متغيرة عشوائية تمثل متوسط عينة حجمها n مسحوبة من هذا المجتمع فإن تباين $\bar{X}$ أي $\delta_{\bar{X}}^2$ يكتب كما يلي:

- في حالة السحب مع الإرجاع فإن: $$\delta_{\bar{X}}^2 = \frac{\delta_X^2}{n}$$
- في حالة السحب بدون إرجاع فإن: $$\delta_{\bar{X}}^2 = \frac{\delta_X^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

ملاحظة:

- في حالة السحب مع الارجاع فإن $\delta_{\bar{x}}^2$ يتأثر طرديا بتباين المجتمع وعكسيا بحجم العينة أي كلما كان حجم العينة كبيرا والمجتمع أكثر تجانسا كان التقدير أدق.

- في حالة السحب بدون إرجاع فإن المقدار $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ والذي يسمى بمعامل الإرجاع يصبح مهملا إذا كان يقترب من الواحد أي إذا كان حجم العينة صغير جدا بالمقارنة مع حجم المجتمع $\left(\frac{n}{N} \prec 0.05\right) \Rightarrow \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \approx 1$
- تباين توزيع المعاينة للمتوسطات $\delta_{\bar{X}}^2$ في حالة المعاينة بدون إرجاع أقل منه في حالة السحب مع الإرجاع أي أنه المعاينة بدون إرجاع تعطي تقديرا أكثر دقة لمعلمة المجتمع μ_X

أي $n \succ 1 \Rightarrow \left(\frac{N-n}{N-1}\right) \prec 1 \Rightarrow \left(\left(\frac{\delta_X^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)\right) \le \left(\frac{\delta_X^2}{n}\right)\right)$

مثال: (نفس المثال السابق) إذا كان لدينا مجتمع يتكون من المفردات التالية:

1.2.3.4.5 وسحبنا جميع العينات العشوائية البسيطة من الحجم 2 التي يمكن سحبها من هذا المجتمع في الحالتين مع أو بدون إرجاع.

- أحسب تباين توزيع المعاينة للوسط الحسابي في الحالتين مع أو بدون إرجاع مع التحقق.

الحل:

تباين المجتمع يحسب كما يلي:

$$\delta_X^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{5}\left((1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2\right) = \frac{10}{5} = 2$$

الحالة الأولى: تباين الوسط الحسابي للعينات في حالة السحب مع الارجاع

من خلال جدول العينات الممكنة نحسب تباين الوسط الحسابي لكل عينة كما يلي:

$\bar{X}$	$(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2$	$\bar{X}$	$(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2$	$\bar{X}$	$(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2$	$\bar{X}$	$(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2$	$\bar{X}$	$(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2$
1	$(1-3)^2 = 4$	1.5	2.25	2	1	2.5	0.25	3	0
1.5	2.25	2	1	2.5	0.25	3	0	3.5	0.25
2	1	2.5	0.25	3	0	3.5	0.25	4	1
2.5	0.25	3	0	3.5	0.25	4	1	4.5	2.25
3	0	3.5	0.25	4	1	4.5	2.25	5	4

جدول توزيع المعاينة لتباين الوسط الحسابي للعينات:

$\bar{X}$	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$f(\bar{x})$	1/25	2/25	3/25	4/25	5/25	4/25	3/25	2/25	1/25
$(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2$	$(1-3)^2=4$	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$f(\bar{x})(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2$	4/25	4.5/25	3/25	1/25	0	1/25	3/25	4.5/25	4/25

*تباين التوزيع العيني لـ $\bar{X}$:

$$\delta^2{}_{\bar{X}}=\sum(\bar{x}-\mu_{\bar{X}})^2 f(\bar{x})=(1-3)^2*(\frac{1}{25})+(1.5-3)^2*(\frac{2}{25})+\dots\dots\dots\dots+(5-3)^2*(\frac{1}{25})=\frac{25}{25}=1$$

وهي تساوي $\frac{\delta_X^2}{n}$

للتحـــــقق: من خلال النظرية $\delta_{\bar{X}}^2=\frac{\delta_X^2}{n}=\frac{2}{2}=1$

الحالة الثانية: تباين الوسط الحسابي للعينات في حالة السحب بدون إرجاع

جدول توزيع المعاينة لتباين الوسط الحسابي للعينات:

$\bar{X}$	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
$(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2$	$(1.5-3)^2=2.25$	1	0.25	0	0.25	1	2.25
$f(\bar{x})$	1/10	1/10	2/10	2/10	2/10	1/10	1/10
$f(\bar{x})(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2$	2.25/10	1/10	0.25/10	0	0.25/10	1/10	2.25/10

*تباين التوزيع العيني لـ $\bar{X}$:

$$\delta^2{}_{\bar{X}}=\sum(\bar{x}-\mu_{\bar{X}})^2 f(\bar{x})=(1.5-3)^2*(\frac{1}{10})+(2-3)^2*(\frac{1}{10})+\dots\dots\dots\dots+(4.5-3)^2*(\frac{1}{10})=\frac{7.5}{10}=0.75$$

وهي تساوي $\frac{\delta_X^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

للتحـــــقق: من خلال النظرية $\delta_{\bar{X}}^2=\frac{\delta_X^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=\frac{2}{2}\left(\frac{5-2}{5-1}\right)=\frac{3}{4}=0.75$

ثالثا: طبيعـة توزيع $\bar{X}$

نظرية:

- إذا كان المجتمع موزع طبيعيا بمتوسط μ_x وتباين δ_X^2 فإن متوسط العينة المسحوبة من هـذا المجتمـع عشـوائيا يتبـع أيضـا التوزيـع الطبيعـي بمتوسـط $\mu_{\bar{x}} = \mu_x$ وتبـاين $\delta_{\bar{X}}^2$

$$X \sim N\left(\mu_X, \delta_X^2\right) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu_{\bar{X}}, \delta_{\bar{X}}^2\right) \Rightarrow Z = \left(\frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\delta_{\bar{X}}}\right) \sim N(0,1)$$

- حسب نظرية النهاية المركزية فإنه إذا كان المجتمع غير طبيعي أو مجهول التوزيع بمتوسط μ_x وتباين δ_X^2 فإن متوسط العينة المسحوبة من هذا المجتمع عشوائيا $\bar{X}$ لا تخضع للتوزيع الطبيعي ولكنها تتوزع توزيع يكون قريباً من التوزيع الطبيعي أي يؤول إلى التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu_{\bar{x}} = \mu_x$ وتباين $\sigma_{\bar{X}}^2$ إذا كان حجم العينة كبيرا $(30 \le n)$

$$X \sim ?\left(\mu_X, \sigma_X^2\right) and\ (n \ge 30) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu_{\bar{X}}, \sigma_{\bar{X}}^2\right) \Rightarrow Z = \left(\frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}\right) \sim N(0,1)$$

ملاحظة:

- وتعتبر النتيجة السابقة هامة جداً في الإحصاء وخاصة في التطبيقات العلمية وتسمى نظرية النهاية المركزية *Central Limit Theorem*
- في حالة السحب مع الإرجاع فإن: $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$
- في حالة السحب بدون إرجاع فإن: $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}\left(\frac{N - n}{N - 1}\right)$
- في حالة السحب بدون إرجاع و $\left(\frac{n}{N} \prec 0.05\right)$ فإن: $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$

رابعا: توزيع المعاينة لتباين العينات S^2

نظرية:

- إذا كانت X متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما حجمه N و S^2 متغيرة عشوائية تمثل تباين عينة حجمها n مسحوبة من هذا المجتمع فإن القيمة المتوقعة لتباين العينة $E\left(S^2\right)$ تكتب كما يلي:

في حالة السحب مع الإرجاع فإن: $E\left(S^2\right)=\sigma_X^2\left(\frac{n-1}{n}\right)$

في حالة السحب بدون إرجاع فإن: $E\left(S^2\right)=\sigma_X^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)$

- إذا كان S^2 تباين عينة عشوائية حجمها n مأخوذة من مجتمع طبيعي فإن:

$$\frac{nS^2}{\sigma_X^2}=\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma_X^2}\sim\chi_{n-1}^2$$

- ليكن لدينا مجتمعان طبيعيان تباينهما σ_1^2 و σ_2^2
- ليكن لدينا مجتمعان طبيعيان A و B، متوسطهما الحسابي μ_A و μ_B، تباينهما σ_A^2 و σ_B^2، نسحب من كل مجتمع عينة عشوائية بحيث نسحب عينة عشوائية a حجمها n_a من المجتمع A و عينة ثانية b حجمها n_b من المجتمع B فإن:

$$F=\frac{\left[S_a^2\frac{n_a}{n_a-1}\right]\frac{1}{\sigma_A^2}}{\left[S_b^2\frac{n_b}{n_b-1}\right]\frac{1}{\sigma_B^2}}=\frac{\frac{\hat{S}_a^2}{\sigma_A^2}}{\frac{\hat{S}_b^2}{\sigma_B^2}}\sim F_{(n_a-1,n_b-1)}$$

ملاحظة:

- عندما يكون N كبيرا جدا أو مجتمع غير محدود فإن $1\sim(N/N-1)$
- عندما يكون $30\leq n$ فإن: $E\left(S^2\right)=\sigma_X^2$
- من النظرية $E\left(S^2\right)=\sigma_X^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\Rightarrow E\left(S^2\frac{n}{n-1}\right)=\sigma_X^2$، بالتالي نقول عن $\left(S^2\frac{n}{n-1}\right)$ أنه مقدر غير متحيز لـ σ_X^2 ونرمز له ب $\hat{S}^2$ حيث:

$$\hat{S}^2=\left(\frac{n}{n-1}S^2\right)=\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)\right)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

- تباين $\hat{S}^2$ هو كالتالي: $V\left(\hat{S}^2\right)=\frac{\mu_4}{n}+\frac{3-n}{n(n-1)}\sigma^4$ حيث:

$$\mu_4=E\left(\left[(X-\mu)^4\right]\right)$$

مثال: (نفس المثال السابق) إذا كان لدينا مجتمع يتكون من المفردات التالية:

1.2.3.4.5 وسحبنا جميع العينات العشوائية البسيطة من الحجم 2 التي يمكن سحبها من هذا المجتمع في الحالتين مع أو بدون إرجاع.

- أحسب القيمة المتوقعة لتباين العينة من خلال متوسط تباينات العينات في الحالتين مع أو بدون إرجاع، ثم قارن بينه وبين تباين المجتمع.

الحل:

الحالة الأولى: حساب متوسط تباينات العينات $E\left(S^2\right)$ في حالة السحب مع الارجاع

نوجد أولاً جميع العينات الممكنة في هذه الحالة، ثم نحسب التباين لكل عينة كما يلي:

العينة	(1.1)	(1.2)	(1.3)	(1.4)	(1.5)	(2.1)	(2.2)	(2.3)	(2.4)
$\bar{X}$	1	1.5	2	2.5	3	1.5	2	2.5	3
S^2	0	0.25	1	2.25	4	0.25	0	0.25	1
العينة	(2.5)	(3.1)	(3.2)	(3.3)	(3.4)	(3.5)	(4.1)	(4.2)	(4.3)
$\bar{X}$	3.5	2	2.5	3	3.5	4	2.5	3	3.5
S^2	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	1	0.25
العينة	(4.4)	(4.5)	(5.1)	(5.2)	(5.3)	(5.4)	(5.5)	$\sum$	المتوسط
$\bar{X}$	4	4.5	3	3.5	4	4.5	5	75	$75/25=3$
S^2	0	0.25	4	2.25	1	0.25	0	25	$25/25=1$

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{2}\left((1.5-1)^2+(1.5-2)^2\right)=\frac{0.25+0.25}{2}=0.25$$

توزيع المعاينة لتباين العينات S^2 هو:

S^2	0	0.25	1	2.25	4

$f\ (s^2)$	5/25	8/25	6/25	4/25	2/25

متوسط التوزيع العيني لـ S^2 :

$$E\left(S^2\right)=\sum S^2 f\ (s^2)=(0*\frac{5}{25})+(0.25*\frac{8}{25})+(1*\frac{6}{25})+(2.25*\frac{4}{25})+(4*\frac{2}{25})=\frac{25}{25}=1$$

للتحــــــقق: من خلال النظرية $E\left(S^2\right)=\sigma_X^2\left(\frac{n-1}{n}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)=1$

الحالة الثانية: حساب متوسط تباينات العينات $E\left(S^2\right)$ في حالة السحب بدون إرجاع

نوجد أولاً جميع العينات الممكنة في هذه الحالة، ثم نحسب التباين لكل عينة كما يلي:

العينة	(1.2)	(1.3)	(1.4)	(1.5)	(2.3)	(2.4)	(2.5)	(3.4)	(3.5)	(4.5)
$\bar{X}$	1.5	2	2.5	3	2.5	3	3.5	3.5	4	4.5
S^2	0.25	1	2.25	4	0.25	1	2.25	0.25	1	0.25

توزيع المعاينة لتباين العينات S^2 هو:

S^2	0.25	1	2.25	4	$\sum$
$f\ (S^2)$	4/10	3/10	2/10	1/10	1

متوسط التوزيع العيني لـ S^2 :

$$E\left(S^2\right)=\sum S^2 f\ (s^2)=(0.25*\frac{4}{10})+(1*\frac{3}{10})+(2.25*\frac{2}{10})+(4*\frac{1}{10})=\frac{12.5}{10}=1.25$$

للتحــــــقق: من خلال النظرية

$$E\left(S^2\right)=\sigma_X^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{10}{8}=1.25$$

خامسا: توزيع المعاينة للفروق والمجاميع للمتوسط والتباين

نظرية:

– ليكن لدينا مجتمعان A و B، متوسطهما الحسابي μ_A و μ_B، تباينهما σ_A^2 و σ_B^2، نسحب من كل مجتمع عينة عشوائية بحيث نسحب عينة عشوائية a حجمها n_a من المجتمع A و عينة ثانية b حجمها n_b من المجتمع B والعينتان مستقلتان فإن:

$$\mu_{a\pm b} = \mu_a \pm \mu_b \quad و \quad \sigma^2_{a\pm b} = \sigma^2_a + \sigma^2_b$$

- في حالة $(30 \le n_b, n_a)$ يقترب توزيع المتغيرة المعيارية للفرق بين متوسطين من التوزيع الطبيعي المعياري ونكتب: $\mu_{a-b} \sim N\ (0,1)$

مثال:

ليكن المجتمعان A و B سحبنا منهما العينتين $a:1.3.5.7$ و $b:2.4.6$

تحقق أن $\sigma^2_{a\pm b} = \sigma^2_a + \sigma^2_b and\ \mu_{a\pm b} = \mu_a \pm \mu_b$

حالة المجموع

حالة المجموع		العينة a			
μ_{a+b}		1	3	5	7
العينة b	2	3	5	7	9
	4	5	7	9	11
	6	7	9	11	13

$$\mu_a = \frac{1+3+5+7}{4} = 4$$

$$\mu_b = \frac{2+4+6}{3} = 4$$

$$\mu_{a+b} = \frac{3+5+7+.........+9+11+13}{12} = \frac{96}{12} = 8$$

حالة الفرق

حالة الفرق		العينة a			
μ_{a-b}		1	3	5	7
العينة b	2	1-	1	3	5
	4	3-	1-	1	3
	6	5-	3-	1-	1

$$\mu_a = \frac{1+3+5+7}{4} = 4$$

$$\mu_b = \frac{2+4+6}{3} = 4$$

$$\mu_{a+b} = \frac{(-1)+1+3+.........+(-3)+(-1)+1}{12} = \frac{0}{12} = 0$$