

CHAPITRE 5- Déplacement des poutres fléchies

5.1 Introduction

Dans toute étude de structure, outre le calcul des réactions, des éléments de réduction et des contraintes, on fait également des calculs de déplacements. Généralement, on fixe pour les déplacements des sections des limites admissibles à ne pas dépasser, tout comme pour les contraintes. Il n'est pas rare même que les conditions de déformabilité soient plus sévères que les conditions de résistance.

La limitation des déplacements vise avant tout à préserver la fonctionnalité de la construction. A titre d'exemple, une trop grande déformabilité des poutres peut provoquer la fissuration des cloisons légères et engendrer des désordres très gênants.

D'autre part, lorsque les déplacements sont importants ils peuvent modifier significativement l'action des charges appliquées (ils engendrent d'autres efforts, dits effets du second ordre), et dans ce cas il est nécessaire d'en tenir compte.

Par ailleurs, la résolution des problèmes hyperstatiques, qui constituent l'essentiel des structures habituelles, fait appel aux calculs de déplacements.

Le déplacement de la section d'une poutre peut être :

- une translation
- une rotation

Dans le cas d'une poutre horizontale fléchie dans le plan xy , l'axe des x étant confondu avec l'axe longitudinal de la pièce, les déplacements verticaux des centres de gravité des sections droites, mesurés à partir de l'axe x , sont appelés flèches. Les rotations se font autour de l'axe z (axe neutre) et représentent les angles, mesurés en radians, dont tournent les sections droites de la poutre.

5.2 Intégration directe de l'équation différentielle

Lorsque le chargement est simple et la section constante, l'expression analytique du moment n'est pas compliquée et le moment d'inertie demeure constant. L'intégration de l'équation (5.1) reste alors aisée et permet d'obtenir facilement l'équation de la déformée.

$$EI_z y'' = -M_z \quad (5.1)$$

La première intégration fournit l'expression de y' ($y' = tg\theta$). Comme on a $y' = \theta$, en vertu de l'hypothèse des petits déplacements, on obtient en fait l'expression générale de la rotation dont tourne la section courante. L'angle est évidemment exprimé en radians.

Notons par ailleurs que la première intégration fait apparaître une constante.

La deuxième intégration donne l'expression cherchée de la déformée et fait apparaître une deuxième constante. Les deux constantes d'intégration s'obtiennent généralement en satisfaisant aux conditions d'appui de la poutre et de continuité de la déformée. Ces conditions sont désignées habituellement par *conditions aux limites*.

Il faut toujours s'assurer que les expressions obtenues des flèches (y) et des rotations (y'), sont continues en tout point de la poutre. En effet, une discontinuité dans l'expression de y marquerait une interruption dans la poutre tandis qu'une discontinuité de y' voudrait dire que la poutre se brise en ce point (articulation). Les deux situations sont absurdes car la déformée est continue.

Par contre, l'expression de la courbure (donc y'') peut être discontinue. C'est ce qui se produit dans les sections où le moment présente une discontinuité (présence d'un couple concentré) ou bien là où la section varie brusquement (discontinuité de I_z).

Considérons l'exemple simple de la poutre de section constante chargée uniformément pour illustrer la méthode (Figure 5.1).

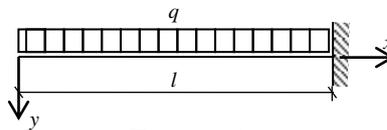


Figure 5.1

L'expression du moment est : $M_z = -\frac{qx^2}{2}$

L'équation différentielle de l'élastique devient :

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = q \frac{x^2}{2}$$

d'où :

$$EI_z \frac{dy}{dx} = q \frac{x^3}{6} + C \quad (a) \quad \text{et} \quad EI_z y = q \frac{x^4}{24} + Cx + D \quad (b)$$

Pour déterminer les constantes d'intégration C et D , il faut écrire deux conditions aux limites. Dans le cas considéré, on peut écrire dans la section d'encastrement deux conditions sur y et y' :

- 1) en $x = l$, $y = 0$ (flèche nulle)
- 2) en $x = l$, $y' = 0$ (rotation nulle)

Ces conditions, sur y et y' , sont des *conditions aux limites géométriques* alors que les conditions aux limites sur y'' et y''' (donc sur M et T , respectivement) sont désignées par *conditions aux limites statiques*.

En utilisant la condition (2), l'équation (a) donne : $C = -ql^3/6$.

Et en appliquant la condition (1), on tire de l'équation (b) : $D = ql^4/8$.

D'où les expressions finales de la rotation et de la flèche :

$$y' = -\frac{ql^3}{6EI_z} + \frac{qx^3}{6EI_z} \quad (5.1a)$$

$$y = \frac{ql^4}{8EI_z} - \frac{ql^3}{6EI_z}x + \frac{qx^4}{24EI_z} \quad (5.1b)$$

Une rotation est positive si elle se fait dans le sens horlogique alors qu'une flèche est positive si elle est du côté des y positifs (vers le bas). En faisant $x = 0$ dans les expressions (5.1a) et (5.1b), on obtient :

$$C/EI_z = \theta_0 = ql^3/6EI_z \text{ et } D/EI_z = f_0 = ql^4/8EI_z$$

Autrement dit, C et D sont respectivement la rotation et la flèche de la section initiale de la poutre, multipliées par la rigidité flexionnelle de la poutre (EI_z).

La méthode d'intégration directe devient fastidieuse quand le chargement et/ou la section présente(nt) des discontinuités. Dans ce cas, l'expression de M_z/EI_z change à chaque discontinuité et on doit travailler par tronçon. On effectue sur chaque tronçon une double intégration pour obtenir l'expression de sa déformée. Mais comme à chaque double intégration on voit apparaître deux constantes d'intégration, le total des constantes pour toute la poutre est égal au double du nombre de tronçons existants.

Les constantes inconnues s'obtiennent en exprimant :

- les conditions d'appui de la poutre,
- les conditions de passage aux sections de jonction entre les différents tronçons. Ces conditions expriment la continuité de la déformée, donc la continuité de y et de y' ,
- certaines conditions statiques en des points particuliers.

Ainsi, si l'expression du second membre de l'équation (5.1) change plusieurs fois (présence de plusieurs tronçons), la détermination des constantes d'intégration nécessite la résolution d'un système de plusieurs équations (avec autant d'inconnues), d'où un surplus de travail.

Voyons cela sur l'exemple simple de la poutre bi-articulée soumise à une charge concentrée (**Fig. 5.2**).

Pour plus de commodité, on écrit l'équation différentielle de l'élastique sous la forme :

$$EI_z y'' = -M_z$$

- $0 \leq x \leq a$ (tronçon 1) :

$$M_z = Pbx/l$$

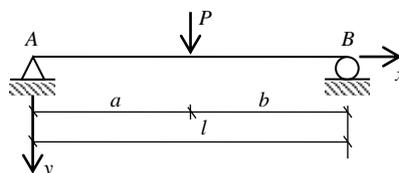


Figure 5.2

$$EI_z y_1' = -\frac{Pb}{2l} x^2 + C_1$$

$$EI_z y_1 = -\frac{Pb}{6l} x^3 + C_1 x + D_1$$

- $a \leq x \leq l$ (tronçon 2) : $M_z = Pa - Pax/l$

$$EI_z y_2' = -Pax + \frac{Pa}{2l} x^2 + C_2$$

$$EI_z y_2 = -\frac{Pa}{2} x^2 + \frac{Pa}{6l} x^3 + C_2 x + D_2$$

Les inconnues C_1 , D_1 , C_2 et D_2 sont déterminées à l'aide des deux conditions aux limites en $x = 0$ et $x = l$, et des deux conditions de passage en $x = a$.

- 1) en $x = 0$, $y_1 = 0$
- 2) en $x = l$, $y_2 = 0$
- 3) en $x = a$, $y_1 = y_2$
- 4) en $x = a$, $y_1' = y_2'$

La résolution de ce système d'équations donne :

$$C_1 = Pab(a+2b)/6l, D_1 = 0, C_2 = Pa(2l^2+a^2)/6l, D_2 = -Pa^3/6$$

D'où les expressions finales, donnant les rotations et les flèches :

- $0 \leq x \leq a$

$$EI_z y_1' = -\frac{Pb}{2l} x^2 + \frac{Pab}{6l} (a+2b) \quad (5.3a)$$

$$EI_z y_1 = -\frac{Pb}{6l} x^3 + \frac{Pab}{6l} (a+2b)x \quad (5.3b)$$

- $a \leq x \leq l$

$$EI_z y_2' = -Pax + \frac{Pa}{2l} x^2 + \frac{Pa}{6l} (2l^2 + a^2) \quad (5.3c)$$

$$EI_z y_2 = -\frac{Pa}{2} x^2 + \frac{Pa}{6l} x^3 + \frac{Pa}{6l} (2l^2 + a^2)x - \frac{Pa^3}{6} \quad (5.3d)$$

Cet exemple, pourtant simple, montre combien l'application de la méthode d'intégration directe devient laborieuse quand la pièce présente des discontinuités (de chargement et/ou de section). On va voir dans le paragraphe suivant comment, grâce à de petits aménagements dans l'application de la méthode précédente, on arrive à réduire le travail à effectuer.

5.3 Méthode de CLEBCH ou des paramètres initiaux

Soit la poutre bi-articulée de section constante représentée à la figure 5.3. Les charges appliquées divisent la poutre en cinq tronçons et une application directe de la méthode d'intégration conduirait à la détermination de dix constantes d'intégration.

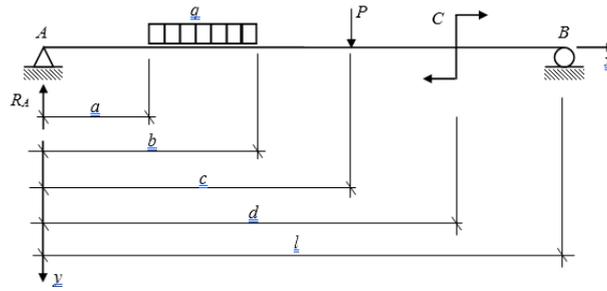


Figure 5.3

La méthode de Clebsch permet, grâce à un artifice de calcul, de réduire les constantes à deux seulement, et ce quelque soit le nombre de tronçons. D'autre part, la méthode fournit une expression unique de la déformée, valable pour tous les tronçons. L'expression de la rotation s'obtient naturellement par dérivation de la fonction de la déformée ;

L'originalité de la méthode vient de sa présentation particulière des calculs. L'idée essentielle de la méthode consiste à écrire l'expression du moment sur un tronçon en ajoutant de nouveaux termes (au moins un terme) à l'expression du moment sur le tronçon précédent en gardant la même origine des abscisses x (voir règle 1).

Appliquons cet artifice à l'exemple considéré. Ecrivons pour chaque tronçon l'expression du moment, l'équation différentielle de l'élastique puis effectuons les deux dérivations successives.

1^{ère} règle : Elle consiste à placer l'origine des coordonnées x, y au centre de gravité d'une section extrême de la poutre, l'extrémité gauche par exemple.

- Tronçon 1 ($0 \leq x \leq a$):

$$M_z = R_A x$$

$$EI_z y'' = -R_A x$$

$$EI_z y' = -R_A \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$EI_z y = -\frac{R_A}{3!} x^3 + C_1 x + D_1$$

En faisant $x = 0$ dans les deux dernières expressions, on obtient :

$$C_1 = EI_z y'_0 = EI_z \theta_0$$

$$D_1 = EI_z y_0 = EI_z f_0$$

Autrement dit, C_1 et D_1 représentent respectivement la rotation et la flèche, multipliées par la rigidité flexionnelle de la poutre (EI_z), de la section initiale.

- Tronçon 2 ($a \leq x \leq b$)

$$M_z = R_A x - \frac{q}{2} (x-a)^2$$

$$EI_z y'' = -R_A x + \frac{q}{2}(x-a)^2$$

$$EI_z y' = -R_A \frac{x^2}{2} + \frac{q}{3!}(x-a)^3 + C_2$$

$$EI_z y = -\frac{R_A}{3!}x^3 + \frac{q}{4!}(x-a)^4 + C_2 x + D_2$$

En faisant $x = a$ dans les deux dernières équations, on en déduit que : $C_2 = C_1$ et $D_2 = D_1$.

- Tronçon 3 ($b \leq x \leq c$)

2^{ème} règle : On suppose la charge répartie appliquée sur tout le reste de la poutre et on applique une charge égale et opposée pour équilibrer la charge ajoutée (cet artifice permet d'avoir des expressions générales valables sur toute la longueur de la poutre).

$$M_z = R_A x - \frac{q}{2}(x-a)^2 + \frac{q}{2}(x-b)^2$$

$$EI_z y'' = -R_A x + \frac{q}{2}(x-a)^2 - \frac{q}{2}(x-b)^2$$

$$EI_z y' = -R_A \frac{x^2}{2} + \frac{q}{3!}(x-a)^3 - \frac{q}{3!}(x-b)^3 + C_3$$

$$EI_z y = -\frac{R_A}{3!}x^3 + \frac{q}{4!}(x-a)^4 - \frac{q}{4!}(x-b)^4 + C_3 x + D_3$$

En comparant les flèches et les rotations dans la section de jonction $x = b$, on trouve : $C_3 = C_2$ et $D_3 = D_2$.

- Tronçon 4 ($c \leq x \leq d$)

$$M_z = R_A x - \frac{q}{2}(x-a)^2 + \frac{q}{2}(x-b)^2 - P(x-c)$$

$$EI_z y'' = -R_A x + \frac{q}{2}(x-a)^2 - \frac{q}{2}(x-b)^2 + P(x-c)$$

$$EI_z y' = -R_A \frac{x^2}{2} + \frac{q}{3!}(x-a)^3 - \frac{q}{3!}(x-b)^3 + \frac{P}{2}(x-c)^2 + C_4$$

$$EI_z y = -\frac{R_A}{3!}x^3 + \frac{q}{4!}(x-a)^4 - \frac{q}{4!}(x-b)^4 + \frac{P}{3!}(x-c)^3 + C_4 x + D_4$$

En comparant de nouveau les flèches et les rotations à gauche et à droite de la section $x = c$, on montre que : $C_4 = C_3$ et $D_4 = D_3$.

- Tronçon 5 ($d \leq x \leq l$)

3^{ème} règle : On multiplie le couple concentré par $(x-d)^0$ afin de marquer la section où commence son influence et pour garder aux expressions leur généralité.

$$M_z = R_A x - \frac{q}{2}(x-a)^2 + \frac{q}{2}(x-b)^2 - P(x-c) + C(x-d)^0$$

$$EI_z y'' = -R_A x + \frac{q}{2}(x-a)^2 - \frac{q}{2}(x-b)^2 + P(x-c) - C(x-d)^0$$

$$EI_z y' = -R_A \frac{x^2}{2} + \frac{q}{3!}(x-a)^3 - \frac{q}{3!}(x-b)^3 + \frac{P}{2}(x-c)^2 - C(x-d) + C_5$$

$$EI_z y = -\frac{R_A}{3!}x^3 + \frac{q}{4!}(x-a)^4 - \frac{q}{4!}(x-b)^4 + \frac{P}{3!}(x-c)^3 - \frac{C}{2}(x-d)^2 + C_5 x + D_5$$

En comparant encore une fois les rotations et les flèches dans la section de jonction ($x = d$), obtenues à l'aide des relations valables sur les tronçons 4 et 5, on montre que : $C_5 = C_4$ et $D_5 = D_4$.

Ainsi, on démontre qu'il n'y a en définitive que deux constantes d'intégration pour toute la poutre :

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = EI_z y'_0 = EI_z \theta_0$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = EI_z y_0 = EI_z f_0$$

Ces deux constantes caractérisent les déplacements (rotation et flèche) de la section initiale de la poutre, d'où leur désignation par *paramètres initiaux*. Elles sont déterminées à partir des conditions d'appui de la poutre considérée. Dans un appui simple ou double la flèche est nulle, $f = 0$, tandis que dans un encastrement on a : $f = \theta = 0$.

On peut réduire à quatre le nombre total des équations en adoptant le mode d'écriture suivant

$x \leq a$	$x \leq b$	$x \leq c$	$x \leq d$	$x \leq l$
$M_z = R_A x$	$-\frac{q}{2}(x-a)^2$	$+\frac{q}{2}(x-b)^2$	$-P(x-c)$	$+C(x-d)^0$
$EI_z y'' = -R_A x$	$+\frac{q}{2}(x-a)^2$	$-\frac{q}{2}(x-b)^2$	$+P(x-c)$	$-C(x-d)^0$
$EI_z y' = EI_z \theta_0 - R_A \frac{x^2}{2}$	$+\frac{q}{3!}(x-a)^3$	$-\frac{q}{3!}(x-b)^3$	$+\frac{P}{2}(x-c)^2$	$-C(x-d)$
$EI_z y = EI_z f_0 + EI_z \theta_0 x - \frac{R_A}{3!}x^3$	$+\frac{q}{4!}(x-a)^4$	$-\frac{q}{4!}(x-b)^4$	$+\frac{P}{3!}(x-c)^3$	$-\frac{C}{2}(x-d)^2$

Pour calculer une grandeur (M_z , y'' , y' ou y) sur un tronçon donné, il faut considérer uniquement les termes à gauche de la limite du tronçon étudié.

Dans l'exemple traité, les conditions aux limites s'écrivent : $y = 0$ en $x = 0$ et en $x = l$. La première condition donne $f_0 = 0$ et à partir de la seconde on tire la valeur de θ_0 .

5.4 Méthode de la poutre conjuguée

5.4.1 Principe de la méthode

Cette méthode est basée sur une analogie entre les allures de la déformée de la poutre considérée et du diagramme des moments fléchissant d'une poutre fictive sollicitée par une

charge fictive. La méthode est également appelée *méthode de Mohr*, du nom de son auteur, ou encore *méthode des poids élastiques*.

Pour une poutre fléchie, on a les relations différentielles suivantes :

$$y'' = - M_z/EI_z \quad (i) \quad \text{et} \quad M_z'' = - q \quad (ii)$$

qui sont identiques du point de vue mathématique.

Posons :

$$y = M_f \quad \text{et} \quad M_z/EI_z = q_f$$

Avec ces changements, l'équation (i) s'écrit :

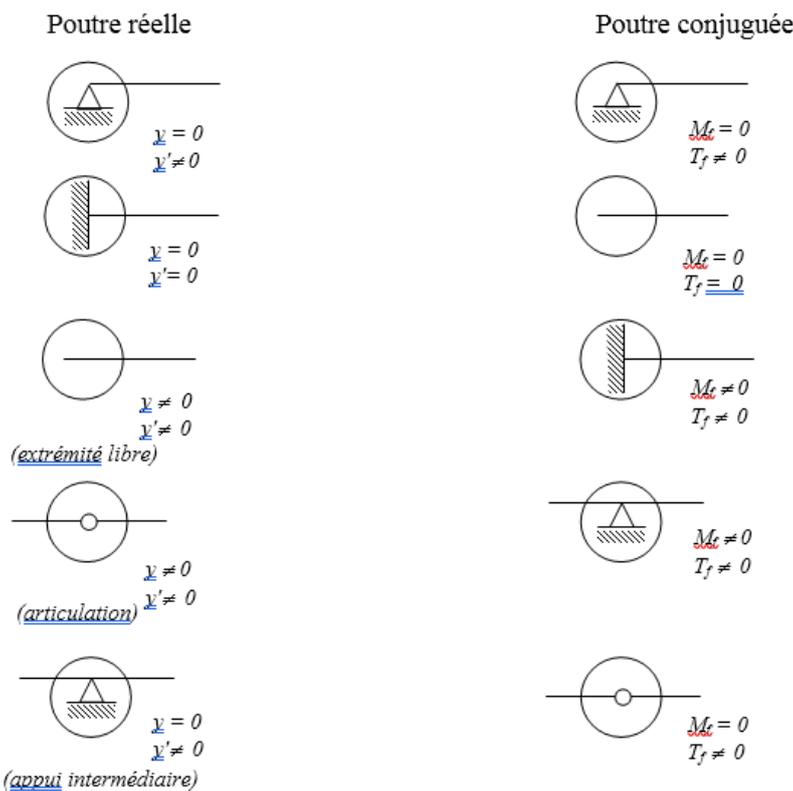
$$M_f'' = - q_f \quad (iii)$$

et est exactement semblable à l'équation (ii). La dernière équation obtenue s'interprète comme ceci : la déformée de la poutre réelle (y) est donnée par le diagramme du moment fléchissant (M_f) d'une poutre fictive, appelée *poutre conjuguée*, sollicitée par une charge $q_f = M_z/EI_z$.

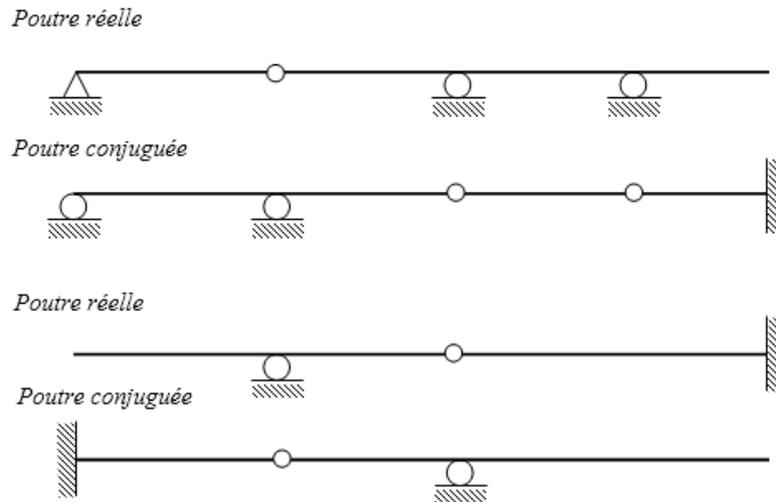
L'équation (iii) est du second ordre et nécessite par conséquent la détermination de deux constantes d'intégration pour la connaissance complète de M_f . Les deux constantes définissent en fait les conditions aux limites de la poutre conjuguée qui s'obtiennent à partir de celles de la poutre réelle puisqu'on a les correspondances :

$$y = M_f \quad \text{et} \quad y' = T_f$$

Les différents cas de figure de conditions d'appui sont indiqués ci-après.



Ces cas sont illustrés par les deux exemples suivants :



Il faut noter que pour respecter les conventions de signes adoptées pour la rotation et la flèche, nous devons considérer que la charge fictive ($q_f = M_z/EI_z$) est dirigée de haut en bas si le moment M_z est positif et vice versa.

5.4.2 Exemple d'application

Reprenons l'exemple de la figure 5.1, déjà traité par la méthode d'intégration directe.

Le signe du moment de la poutre réelle est négatif puisqu'il fait tendre les fibres supérieures (5.4c). Cela signifie que la charge fictive à appliquer à la poutre conjuguée doit être dirigée de bas en haut (5.4d).

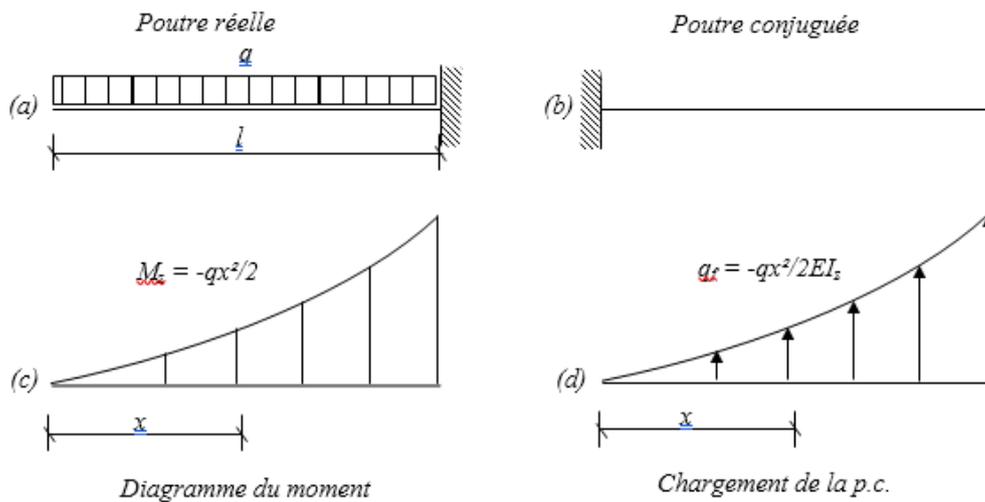


Figure 5.4

Les composantes de réaction dans la section d'encastrement de la poutre fictive sont :

$$T_E = -\frac{1}{3} \frac{ql^2}{2EI_z} l = -\frac{ql^3}{6EI_z} \text{ et } M_E = \frac{1}{3} \frac{ql^2}{2EI_z} l \frac{3l}{4} = \frac{ql^4}{8EI_z}$$

D'où :

$$y' = -\frac{ql^3}{6EI_z} + \frac{qx^3}{6EI_z} \quad (i) \quad y = \frac{ql^4}{8EI_z} - \frac{ql^3x}{6EI_z} + \frac{qx^4}{24EI_z} \quad (ii)$$

Les équations (i) et (ii) sont identiques aux expressions (5.4a) et (5.4b) obtenues par la méthode d'intégration directe.

5.5 Flèche provoquée par l'effort tranchant

Sous l'effet de l'effort tranchant T_y , la section Σ_2 d'abscisse $x+dx$, subit un glissement dy par

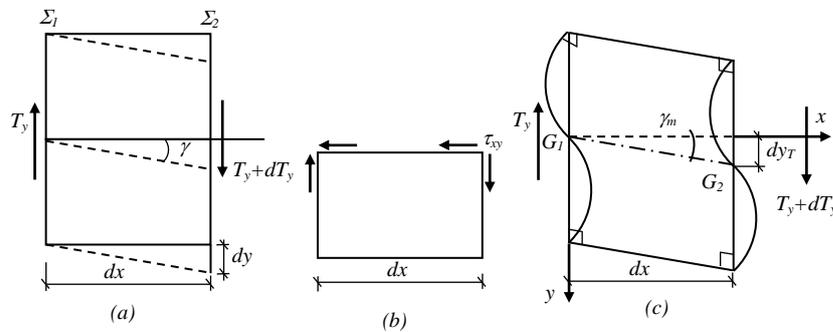


Figure 5.5

rapport à la section Σ_1 d'abscisse x (Fig. 5.5a).

Les déplacements étant petits, on peut écrire :

$$dy = \gamma dx \quad (k)$$

où γ représente la variation que subissent les angles, initialement droits.

D'autre part, en vertu de la loi de Hooke, on a :

$$\gamma = \tau/G \quad (l)$$

La dernière expression montre que les déplacements angulaires (γ) et par conséquent les déplacements linéaires (dy), en raison de la relation (k), sont la conséquence des contraintes de cisaillement (Fig. 5.5b). On sait en effet qu'à l'intérieur des corps il n'y a pas d'efforts concentrés mais uniquement des distributions de contraintes.

Concernant la distribution des contraintes tangentielles provoquées par l'effort tranchant, on apprend dans le cours de flexion simple qu'elle n'est pas uniforme sur la section ; ce qui veut dire que la déformation angulaire γ n'est pas constante mais varie d'une couche à l'autre. La variation de γ entraîne un gauchissement des sections initialement planes (Fig. 5.5c).

Evaluons le déplacement y_T que subit le centre de gravité d'une section courante par rapport à la position de l'axe de la poutre avant déformation (x).

On a :

$$dy_T = \gamma_m dx$$

où γ_m représente la distorsion, mesurée par rapport à l'axe non déformé de la poutre, de l'angle droit.

5.5.1 Travail et énergie de déformation

La distorsion peut être déterminée en comparant le travail accompli par l'effort tranchant au cours de la déformation de l'élément de longueur dx à l'énergie emmagasinée dans ce même élément.

Le travail effectué par l'effort tranchant vaut :

$$d\tau_e = \left(\frac{1}{2}\right) T_y dy_T = \frac{1}{2} T_y \gamma_m dx \quad (5.4)$$

L'énergie emmagasinée dans une couche $b dx$ d'épaisseur dy (Figure 2.8), avec dy suffisamment petit pour pouvoir admettre que la contrainte ne varie pas, est donnée par :

$$d^2W = \left(\frac{1}{2}\right) (\tau_{xy} b dy) \gamma dx = \left(\frac{1}{2}\right) \tau_{xy} b \gamma dx dy \quad (5.5)$$

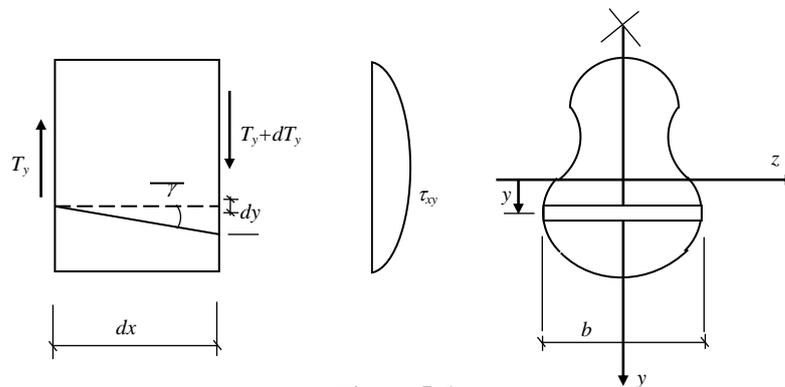


Figure 5.6

L'énergie emmagasinée dans tout le tronçon dx s'obtient en considérant toutes les couches élémentaires $b dx dy$, c'est-à-dire en sommant sur toute la section (notée A).

$$dW = \frac{1}{2} \int_A \gamma \tau_{xy} b dx dy = \frac{dx}{2} \int_A \gamma \tau_{xy} b dy$$

Sachant que :

$$\gamma = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \text{et que} \quad \tau_{xy} = \frac{T_y S_z^*}{b I_z}$$

où :

- S_z^* représente le moment statique par rapport à l'axe z de l'aire de la section comprise entre la cote y et la fibre inférieure de la section,
- b est largeur de la section à la cote y ,

il vient :

$$dW = \frac{dx}{2} \int_A \frac{T_y^2 S_z^{*2}}{Gb^2 I_z^2} b dy = \frac{dx}{2} \int_A \frac{T_y^2 S_z^{*2}}{Gb I_z^2} dy = \frac{T_y^2 dx}{2GI_z^2} \int_h \frac{S_z^{*2}}{b} dy \quad (5.6)$$

$\frac{I_z^2}{\int_h \frac{S_z^{*2}}{b} dy}$ est une quantité ayant la dimension d'une aire. Elle ne dépend que des caractéristiques géométriques de la section et est toujours inférieure à la section (A), d'où sa désignation habituelle par A_{red} (section réduite).

On peut poser :

$$\kappa = \frac{A}{A_{red}} \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{A}{I_z^2} \int_h \frac{S_z^{*2}}{b} dy \quad (5.7)$$

Le coefficient κ , appelé *facteur de cisaillement*, est toujours supérieur à 1. Il caractérise la distribution des contraintes tangentielles dues à l'effort tranchant. Plus la distribution de ces contraintes s'éloigne de la distribution uniforme, plus κ est grand (il vaut 1.2 pour une section rectangulaire, 1.111 pour une section circulaire et varie généralement de 2 à 3 pour les sections en I).

L'expression (2.10) peut s'écrire :

$$dW = \frac{T_y^2 dx}{2GA_{red}} = \frac{\kappa T_y^2}{2GA} dx \quad (5.8)$$

En comparant les relations (5.4) et (5.8) on tire :

$$\gamma_m = \frac{T_y}{GA_{red}} = \frac{\kappa T_y}{GA} \quad (5.9)$$

Le glissement dy_T entre les sections Σ_1 et Σ_2 devient :

$$dy_T = \gamma_m dx = \frac{\kappa T_y}{GA} dx \quad (5.10)$$

Or, $T_y dx = dM_z$, donc :

$$dy_T = \frac{\kappa}{GA} dM_z \quad (5.11)$$

Le déplacement du centre de gravité de la section d'abscisse x s'obtient en intégrant de 0 à x :

$$y_T(x) - y_T(0) = \frac{\kappa}{GA} [M_z(x) - M_z(0)] \quad (5.12)$$

Cette dernière expression est particulièrement indiquée pour le calcul des flèches provoquées par l'effort tranchant lorsque le diagramme de ce dernier est connu. En effet, la variation du moment, $M_z(x) - M_z(0)$, représente l'aire du diagramme de T_y compris entre 0 et x .

De la relation (5.10), on peut tirer :

$$\frac{d^2 y_T}{dx^2} = \frac{\kappa}{GA} \frac{dT_y}{dx} = -\frac{\kappa}{GA} q \quad (5.13)$$

Cette dernière quantité représente la courbure due à l'effort tranchant. En superposant les courbures provoquées par le moment fléchissant et l'effort tranchant, on obtient l'équation différentielle complète de l'élastique ; qui s'écrit :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} - \frac{\kappa}{GA} q \quad (5.14)$$

Si on utilise la méthode de la poutre conjuguée, la charge fictive à considérer est dans ce cas :

$$q_f = \frac{M_z}{EI_z} + \frac{\kappa}{GA} q \quad (5.15)$$

Remarque : A partir de la relation (2.14), on peut tirer la relation :

$$\frac{dy_T}{dx} = \frac{\kappa}{GA} T_y \quad (5.16)$$

qui permet de faire une observation intéressante. En effet, l'équation (5.16) montre qu'on n'a pas $dy_T/dx = 0$ dans une section d'encastrement, où T_y est quelconque. Les approximations obtenues restent toutefois très proches des solutions exactes.

5.5.2 Exemples d'application

Exemple 1

Calculons la flèche à mi-portée

d'une poutre bi-articulée sollicitée par une charge P appliquée en son milieu.

La flèche due au moment, qui peut être obtenue par particularisation de la relation (5.3b) ou (5.3d), vaut :

$$f_M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl^3}{48EI_z}$$

Pour la flèche provoquée par T , on a, en vertu de l'équation (5.12) :

$$f_T\left(\frac{l}{2}\right) - f_T(0) = f_T\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\kappa}{GA} \frac{P}{2} \frac{l}{2} = \frac{\kappa Pl}{4GA}$$

comme $G = E/2(1+\nu)$, il vient :

$$f\left(\frac{l}{2}\right) = f_M\left(\frac{l}{2}\right) + f_T\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl^3}{48EI_z} + \frac{1.2Pl(1+\nu)}{4Eb}$$

d'où :

$$f\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl}{4Eb} \left(\frac{l^2}{h^2} + 2.88 \right)$$

Dans le cas considéré, $l = 10h$, la flèche due à l'effort tranchant est inférieure à 3% de celle provoquée par le moment.

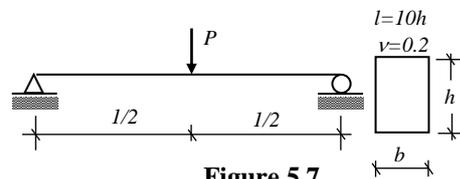


Figure 5.7

Exemple 2

Calculons la flèche de l'extrémité libre d'une poutre-console de section rectangulaire (bh) soumise à une charge uniformément répartie (**Fig. 5.1**). La flèche provoquée par le moment seul s'obtient en faisant $x=0$ dans l'expression (5.1b), soit : $f_M = \frac{ql^4}{8EI_z}$.

En utilisant une nouvelle fois la relation (5.12) entre 0 et l , on obtient :

$$y_T(l) - y_T(0) = \frac{\kappa}{GA} [M_z(l) - M_z(0)]$$

Or à l'extrémité libre ($x=0$) le moment est nul et, d'autre part, dans la section d'encastrement ($x = l$) la flèche est nulle. L'expression ci-dessus devient alors :

$$-y_T(0) = \frac{\kappa}{GA} M_z(l)$$

Sachant que $M_z(l) = -ql^2/2$, il vient :

$$f_T(0) = y_T(0) = \frac{\kappa ql^2}{2GA}$$

L'expression finale de la flèche résultante s'écrit :

$$f = \frac{ql^4}{8EI_z} + \frac{\kappa ql^2}{2GA} = \frac{ql^2}{2Ebh} \left(\frac{3l^2}{h^2} + 2.88 \right)$$