

## CHAPITRE 4- Flexion simple

### 4.1 Introduction

En physique (mécanique), la flexion est la déformation d'un objet sous l'action d'une charge. Elle se traduit par une courbure. Dans le cas d'une poutre, elle tend à rapprocher ses deux extrémités. Dans le cas d'une plaque, elle tend à rapprocher deux points diamétralement opposés sous l'action.

Une poutre est soumise à la *flexion* lorsque les forces qui lui sont appliquées tendent à faire varier sa *courbure* (Fig. 4.1).

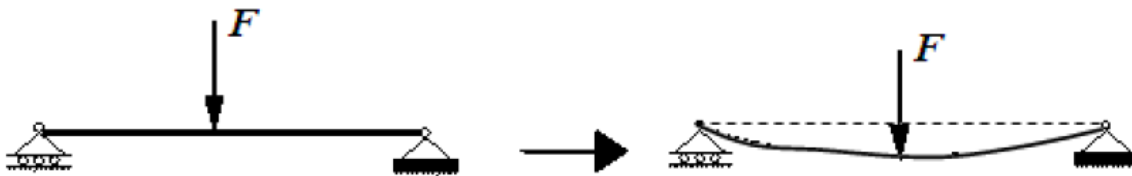


Figure 4.1 Courbure d'une poutre

On entend par *flexion simple* un mode de sollicitation tel que dans les sections droites de la poutre il existe deux composantes des efforts intérieurs : le moment fléchissant  $M_{Jz}$  (ou  $M_{Jy}$ ) et l'effort tranchant  $T_y$  (ou  $T_z$ ).

La flexion est aussi dite *simple*, lorsque la poutre possède un *plan de symétrie* et que les forces fléchissantes agissent dans ce plan, *perpendiculairement* au grand axe de la poutre (Fig. 4.2).

Nous nous limiterons dans ce cours à l'étude de la flexion des poutres droites isostatiques, c'est-à-dire celles pour lesquelles les équations d'équilibre suffisent à la détermination des actions de liaison. Nous nous limiterons également aux poutres dont le plan de symétrie est vertical ( $G_{xy}$ ).

### 4.2 Hypothèses de calcul

- La ligne moyenne de la poutre est rectiligne. L'axe  $(O,x)$  est confondu avec la ligne moyenne.
- La section droite de la poutre est constante.
- La poutre admet un plan de symétrie longitudinal, par exemple le plan  $(O,x,y)$ . Il en résulte que  $(G,y)$  et  $(G,z)$  sont les axes principaux de la section droite.
- Toutes les forces appliquées à la poutre que ce soit les forces à distance ou les forces élémentaires de liaison sont :
  - perpendiculaires à la ligne moyenne
  - situées dans le plan de symétrie ou réparties symétriquement par rapport à celui-ci.
  - concentrées en un point ou réparties suivant une loi.
- Au cours de la déformation, les sections droites restent planes et normales à la ligne moyenne.

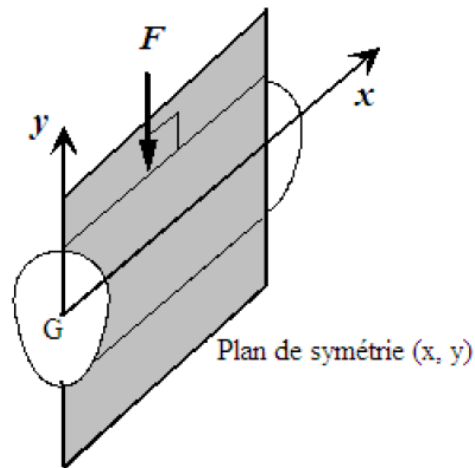


Figure 4.2 Poutre en flexion simple

### 4.3 Essai de flexion

Considérons une poutre, reposant sur deux appuis, soumise à une charge concentrée verticale (Fig. 4.3).

Après déformation, cette poutre fléchit : On constate que les fibres situées dans la partie supérieure sont sollicitées en compression tandis que celles situées en partie inférieure sont sollicitées en traction.

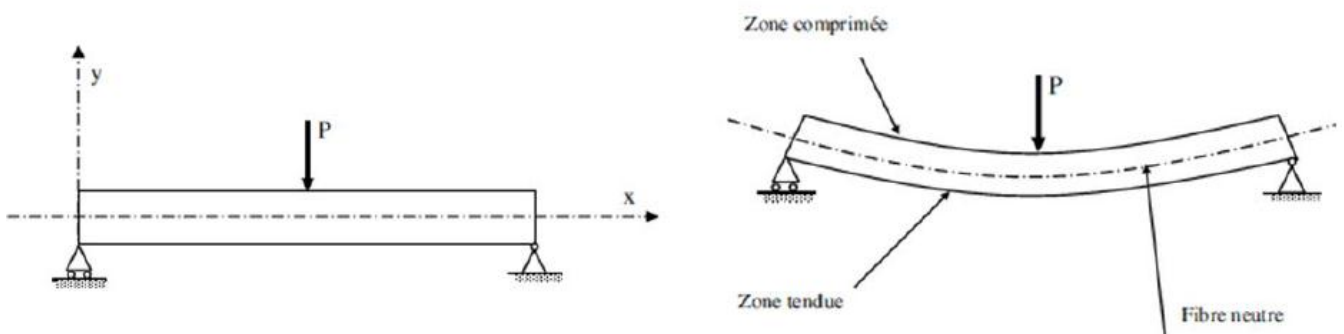


Figure 4.3 Modélisation d'un essai de flexion trois points

Entre ces deux régions il existe une fibre qui ne reste ni tendue ni comprimée : la fibre neutre.

Les allongements ou raccourcissements relatifs sont proportionnels à la distance  $y$  de la fibre considérée.

### 4.4 Répartition des contraintes

#### 4.4.1 Contraintes normales

Lorsque la poutre fléchit (Fig. 4.4), la section droite pivote d'un angle  $\Delta\phi$ .

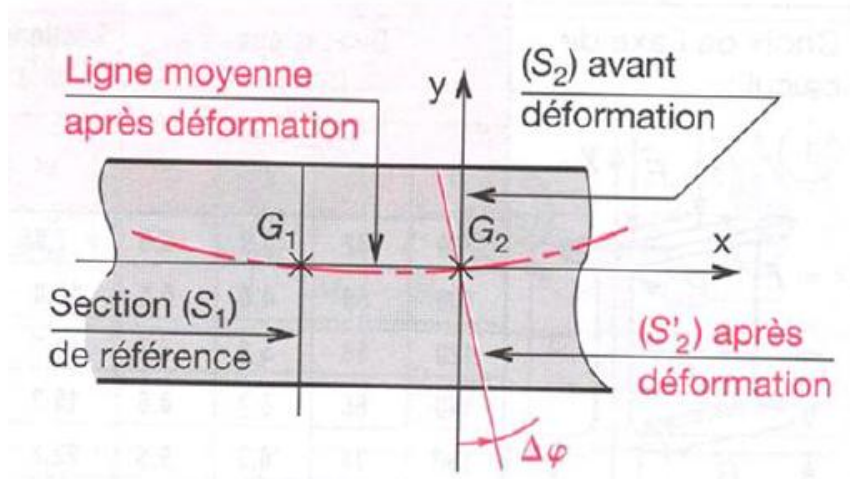


Figure 4.4 Définition de l'angle  $\Delta\phi$

Les contraintes normales engendrées sont proportionnelles à la distance qui les sépare du plan des fibres moyennes, d'où :

$$\sigma_M = -E\theta y \tag{4.1}$$

E : Module, d'Young [MPa]

Y : distance de M par rapport à la fibre neutre [mm].

$\theta = \frac{\Delta\phi}{\Delta x}$  : Angle unitaire de flexion [rad/mm]

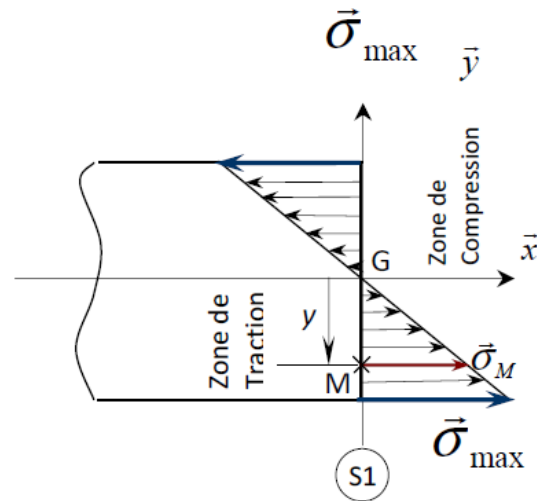


Figure 4.5 Répartition des contraintes normales

**4.4.2 Relation entre contrainte normale et moment fléchissant**

Le vecteur contrainte dans la section droite s'écrit :

$$\vec{C}(M, \vec{x}) = \sigma_x \vec{x} = -E\theta y \vec{x}$$

Le moment résultant du torseur de cohésion  $\vec{M}_{fz} = M_{fz} \vec{z} = \int_S G\vec{M} \wedge \vec{C}(M, \vec{x})$

$G\vec{M} = y\vec{y} + z\vec{z}$  , Il en résulte que :  $M_{fz} = \int_S E \theta y^2 dS = E \theta \int_S y^2 dS$

$$\text{Or } \sigma_x = -E\theta y \Rightarrow E\theta = -\frac{\sigma_x}{y} \quad \text{Donc : } M_{fz} = -\frac{\sigma_x}{y} \int_S y^2 dS = -\frac{\sigma_x}{y} \cdot I_{GZ}$$

$$\text{Finalement } M_{fz} = -\frac{\sigma_x}{y} I_{GZ} \Rightarrow \sigma_x = -\frac{M_{fz}}{I_{GZ}} y$$

Les contraintes maximales se développent dans les fibres les plus éloignées de la fibre neutre. :

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M_{fz}|_{\max}}{\frac{I_{GZ}}{v}}$$

$v = |y|_{\max}$  : Ordonnée du point le plus éloigné de  $(G, \vec{z})$  [mm].

$\frac{I_{GZ}}{v}$  : Module de flexion de la section droite (S1).

$\sigma_M$  : Contrainte normale de flexion en M [MPa]

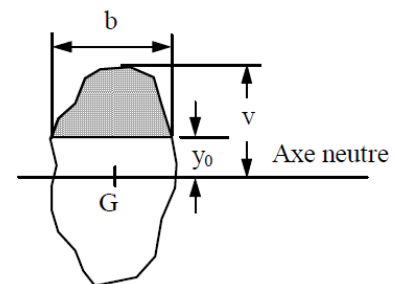
#### 4.4.3 Contrainte tangentielle

La répartition des contraintes tangentielles est plus difficile à déterminer. Pour cela on fait l'hypothèse que la contrainte tangentielle  $\tau_y$  est uniformément répartie, non pas sur la section entière mais sur toutes les fibres situées à une distance  $y_0$  de l'axe neutre dans le plan de la section (S). Sa valeur est donnée par :

$$\tau_y = -\frac{T_y w_{Gz}}{b I_{Gz}} \quad \text{avec : } w_{Gz} = \iint_{(S)} y \, ds$$

$w_{Gz}$  représente le moment statique (d'ordre 1) de la zone hachurée de la section par rapport à l'axe neutre.

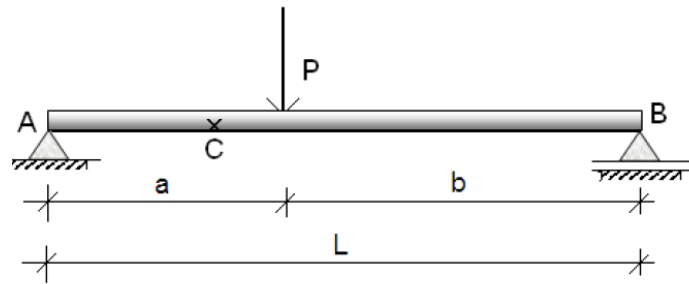
Et  $b$  est la largeur de poutre à l'endroit où est calculée la contrainte de cisaillement.



**Figure 4.6** Moment statique d'une section plane

#### 4.4.4 Relation entre efforts tranchants et moments fléchissant

Soit la poutre ci-dessous soumise à la flexion simple. Imaginons une coupure en un point  $C$  qui divise la poutre en deux parties notées *gauche* et *droite*. Chacune de ces deux parties est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs qu'elle reçoit et sous l'action des effets de l'autre partie (efforts intérieurs).



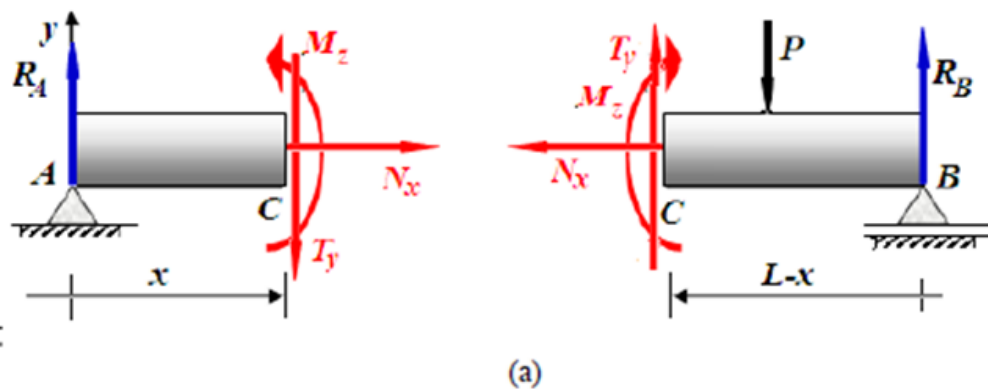
**Figure 5.7** Poutre sollicitée en flexion simple

Chacune des deux parties agit sur l'autre de sorte que:

- Tous les mouvements horizontaux, verticaux et de rotation d'une partie par rapport à l'autre sont nuls.
- Chaque partie est en équilibre. Pour qu'il y ait concordance en signe entre les deux parties, on utilise la convention de signe montrée sur la figure (5.8).

L'effort tranchant  $T(x)$  dans une section d'abscisse  $x$ , séparant la poutre orientée en une partie *gauche* et une partie *droite*, est la résultante des forces extérieures s'exerçant sur *la partie gauche*.

Le moment fléchissant  $M(x)$  dans une section d'abscisse  $x$ , séparant la poutre orientée en une partie *gauche* et une partie *droite*, est la somme des moments extérieurs (dus aux couples concentrés et aux efforts d'action et de réaction) s'exerçant sur *la partie gauche*.



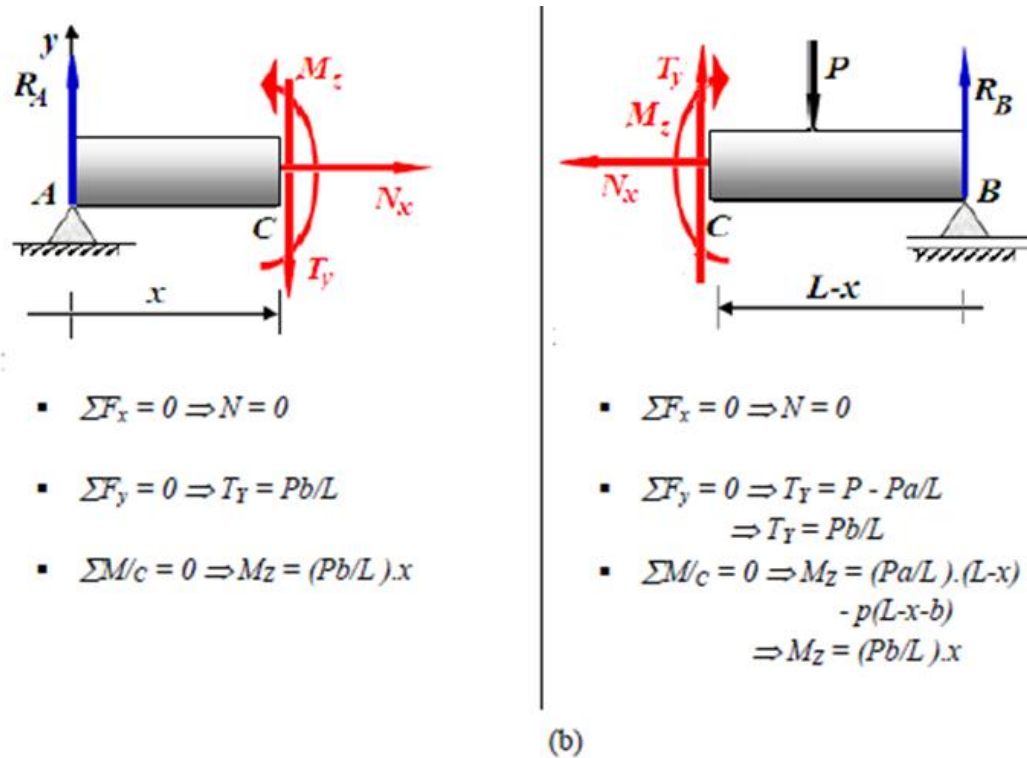


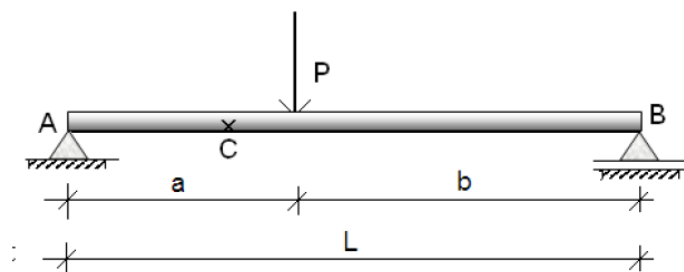
Figure 5.8 Convention de signes

### 4.5 Diagrammes des Efforts tranchants et des moments fléchissant

Le diagramme des efforts tranchants est la courbe représentative de la fonction  $T(x)$  et le diagramme des moments fléchissant est la courbe représentative de la fonction  $M(x)$ , où  $x$  est l'abscisse de la poutre de l'une de ses extrémités.

#### Exemple 4.1

Exprimer et tracer la variation de l'effort tranchant et le moment fléchissant le long de la poutre schématisée par la figure ci-dessous.



#### Solution 4.1

Supposons que la poutre soit coupée au point C (1ère partie) puis au pont (D) (2ème partie).

1<sup>ère</sup> partie :  $0 \leq x \leq a$

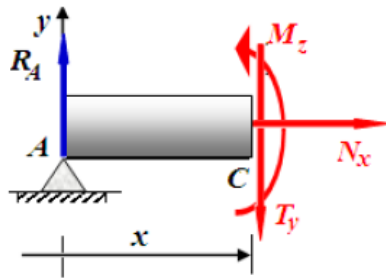


Fig. E6.1-b

2<sup>ème</sup> partie :  $a \leq x \leq L$

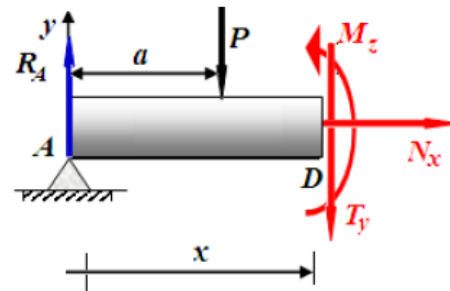
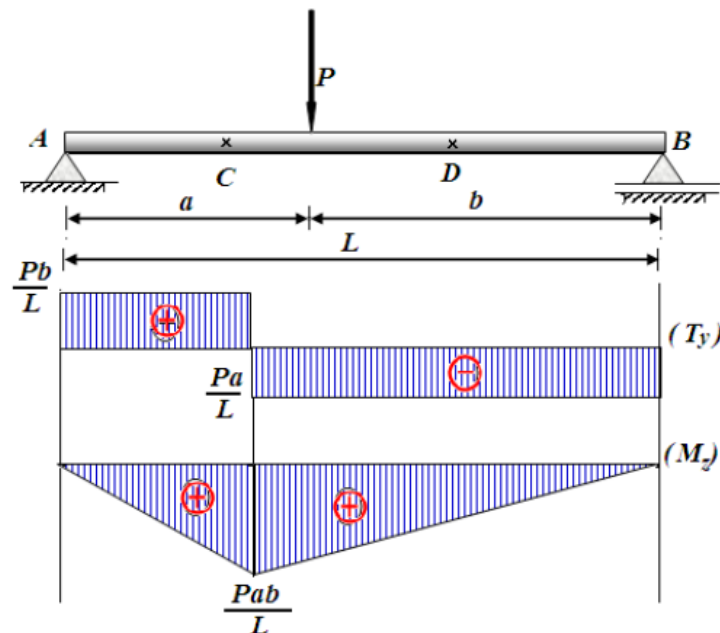


Fig. E6.1-c

- $\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0$
- $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_Y = Pb/L$
- $\sum M/C = 0 \Rightarrow M_Z = (Pb/L) \cdot x$   
 $M_Z(x=0) = 0$   
 $M_Z(x=a) = Pab/L$

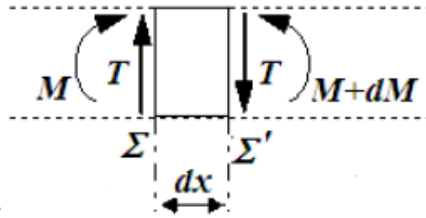
- $\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0$
- $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_Y = - Pa/L$
- $\sum M/C = 0 \Rightarrow M_Z = (Pa/L) \cdot (L-x)$   
 $M_Z(x=a) = Pab/L$   
 $M_Z(x=L) = 0$

Ayant obtenu les expressions des efforts tranchants et moments fléchissant pour chacune des deux parties, traçons leurs variations le long de la poutre comme montrées par la figure ci-dessous.



#### 4.6 Relation entre moment fléchissant et effort tranchant

Considérons un élément de poutre pris entre deux sections ( $\Omega$ ) et ( $\Omega'$ ) infiniment voisines, distantes de  $dx$  (Fig. 4.9).



**Figure 4.9** Élément de poutre isolé non chargé

L'influence de la partie gauche sur l'élément est représentée par  $T$  et  $M$ .

L'influence de la partie droite sur l'élément est représentée par  $T'$  et  $M'$ .

Si aucun effort ne s'exerce sur la poutre entre les sections ( $\Omega$ ) et ( $\Omega'$ ), les efforts tranchants de ces deux sections sont égaux ( $T'=T$ ). Par contre les moments fléchissant  $M$  et  $M'$  ( $M'=M+dM$ ) sont différents.

L'équilibre de l'élément s'écrit:  $M + T dx - M - dM = 0$

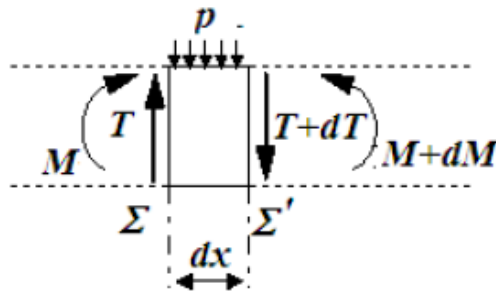
Soit:

$$\frac{dM}{dx} = T \quad (4.2)$$

Ainsi, sur toute portion de poutre comprise entre des charges, l'effort tranchant est la dérivée par rapport à l'abscisse  $x$  du moment fléchissant.

#### 4.7 Relation entre effort tranchant et chargement réparti

Considérons le cas où une charge répartie, d'intensité  $p$ , s'exerce entre les sections ( $\Sigma$ ) et ( $\Sigma'$ ) (Fig. 4.10). La charge totale appliquée sur l'élément est  $p dx$ .



**Figure 4.10** Élément de poutre isolé chargé uniformément

L'équilibre des forces sur l'élément mène à:  $T - p dx - T - dT = 0$

Ce qui veut dire que:

$$\frac{dT}{dx} = -p \quad (4.3)$$

L'équilibre des moments donne:  $M + T dx - p dx dx/2 - M - dM = 0$

En négligeant le terme du second ordre

$$\left( p \frac{(dx)^2}{2} \right) \quad (4.4)$$



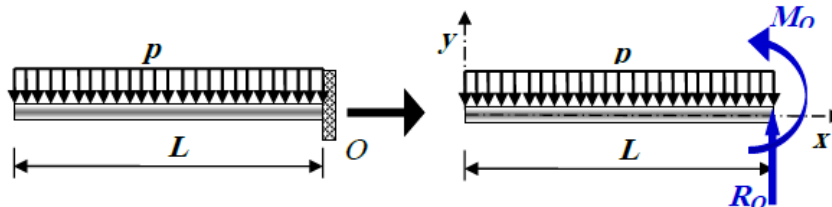
Il reste

$$T = \frac{dM}{dx} \quad (4.5)$$

Ce qui veut dire que la relation entre l'effort tranchant et le moment fléchissant reste valable au premier ordre.

#### Exemple 4.2

Pour la poutre console schématisée par la figure ci-dessous, exprimer et tracer la variation de l'effort tranchant et le moment fléchissant le long de la poutre.



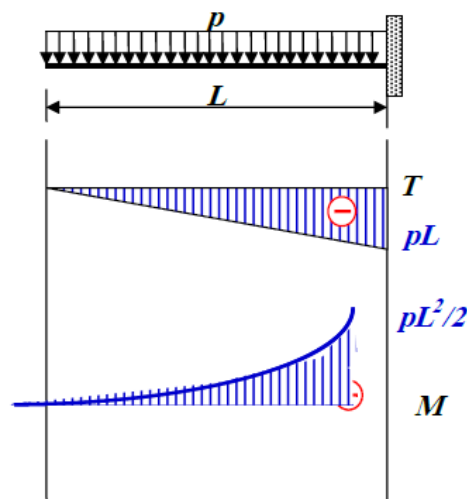
#### Solution 4.2

On a, pour  $0 \leq x \leq L$  :

$$T(x) = -p \cdot (x)$$

$$M(x) = -\frac{p \cdot (x)^2}{2}$$

Ces expressions montrent la variation de l'effort tranchant et du moment fléchissant en fonction de l'abscisse x. Leurs tracés sont montrés sur la figure suivante



#### Remarque

Lorsqu'une charge concentrée s'exerce entre  $(\Sigma)$  et  $(\Sigma')$  (Fig. 4.11), l'équilibre s'écrit:

$$T' = T - F$$

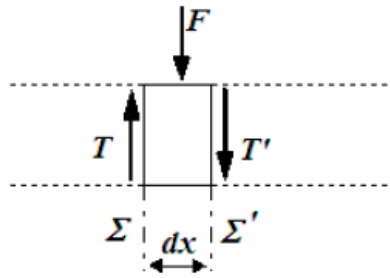


Fig.4.11 Elément de poutre isolée chargé par une force concentrée.

## 4.8 Condition de résistance à la flexion

### 4.8.1 Contrainte normale

En tenant compte des singularités de forme et des hypothèses simplificatrices, la contrainte réelle doit être inférieure à une contrainte admissible. La condition de résistance pour les contraintes normales s'écrit donc :

$$k \cdot |\sigma_{\max}| \leq \sigma_p = \frac{\sigma_e}{s}$$

$k$  : coefficient de concentration de contraintes en flexion.

$s$  : coefficient de sécurité.

### 4.8.2 Contrainte tangentielle

De même la condition de résistance pour les contraintes tangentielles s'écrit :

$$|\tau_{moy}| \leq \tau_p = \frac{\tau_e}{s}$$

## 4.9 Equation différentielle de la déformée

### 4.9.1 Définition de la déformée

Considérons une poutre horizontale simplement appuyée, fléchie dans le plan vertical  $xy$  (Fig.4.12). Après flexion, l'axe longitudinal  $AB$  de la poutre prend la forme courbe  $AMB$ . Cette courbe est appelée *déformée* ou *ligne élastique* (ou *élastique* tout simplement) de la poutre et peut être décrite par une équation de la forme  $y = f(x)$ . Les ordonnées  $y$  représentant les flèches subies par les sections (leurs centres de gravité plus exactement) de la pièce.

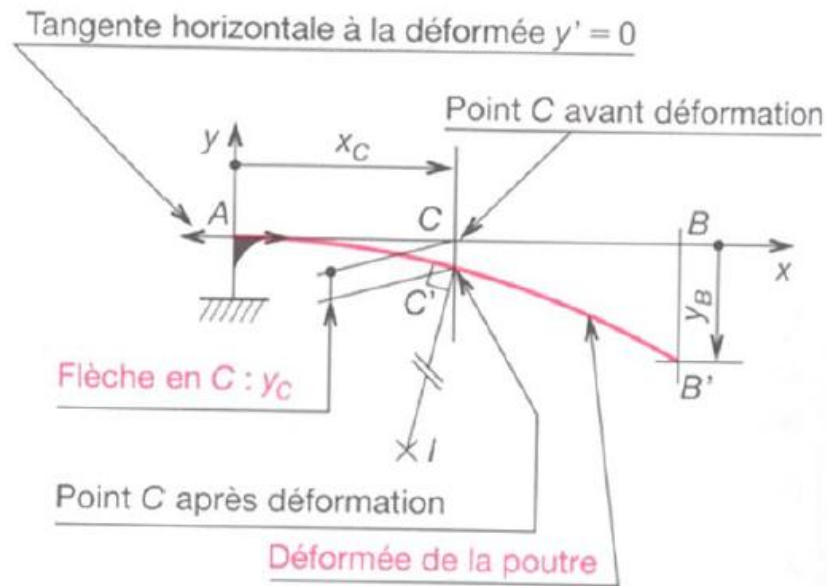


Figure 4.12 La déformée d'une poutre

### 4.9.2 Relations entre flèche et moment fléchissant

L'influence de l'effort tranchant sur la courbure de la déformée étant généralement très faible, elle peut être négligée (nous étudierons plus loin l'influence de  $T$ ). Nous admettrons donc que la courbure de la ligne élastique en un point donné ne dépend que de la valeur du moment fléchissant en ce point. Dans ce cas, nous utilisons la relation liant la courbure au moment fléchissant obtenue rigoureusement dans le cas de la flexion pure et qui s'écrit :

$$\frac{I}{R} = \frac{M_z}{EI_z} \tag{4.6}$$

D'autre part, on apprend dans les cours de Géométrie Différentielle que la courbure en un point  $M$ , d'une courbe plane donnée par l'équation explicite  $y = f(x)$ , vaut :

$$\frac{1}{R} = \varepsilon \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{4.7}$$

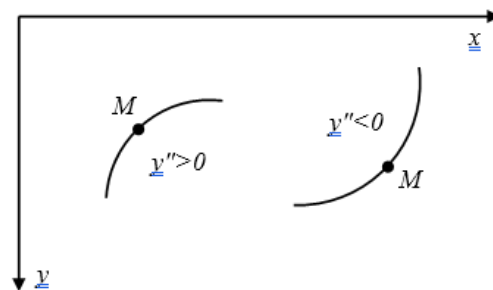


Figure 4.13 Courbure en un point M

Le facteur  $\varepsilon$  vaut  $\pm 1$  et a été introduit pour des raisons que nous évoquons plus loin. Remarquons toutefois que du point de vue mathématique  $\varepsilon$  vaut  $+1$  et le signe de la courbure ne dépend que de la valeur de la dérivée seconde (le dénominateur de l'expression (2.2) étant strictement positif). Ainsi, la

courbure (ou la dérivée seconde) est positive si la concavité de la courbe est tournée vers les  $y$  positifs et elle est négative quand la concavité est orientée vers les  $y$  négatifs (Fig.4.13).

A partir des équations (4.6) et (4.7), on déduit la relation différentielle suivante reliant le moment ( $M_z$ ) et la flèche ( $y$ ).

$$\frac{M_z}{EI_z} = \varepsilon \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (4.7)$$

Physiquement, la dérivée première  $y' = dy/dx$  représente la pente de la tangente à la déformée  $y$  au point courant  $M$ . Dans le cadre de l'hypothèse admise des petits déplacements, les angles sont très petits et, non seulement on peut confondre la tangente et l'angle ( $dy/dx = \operatorname{tg} \theta \approx \theta$ ), mais le terme  $(dy/dx)^2$  devient négligeable devant l'unité. D'où la simplification de la relation (4.8) :

$$\frac{M_z}{EI_z} = \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \varepsilon y'' \quad (4.8)$$

Notons au passage que dans le cadre des petits déplacements,  $y'$  représente également la rotation de la section  $\Sigma$  d'abscisse  $x$ .

La valeur à donner à  $\varepsilon$  se déduit plus facilement de la dernière expression. Il suffit de comparer les signes de  $y''$  et de  $M_z$ . La convention de signes adoptée pour le moment est exactement l'opposée de celle de  $y''$  puisqu'on considère un moment comme positif quand la concavité de la déformée est tournée vers les  $y$  négatifs.

D'où le signe adéquat à prendre :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = -\frac{M_z}{EI_z} \quad \underline{\text{ou encore}} : EI_z y'' = -M_z$$

Donc, on peut calculer la flèche à partir de l'équation de la déformée déterminer par double intégration de l'équation du moment fléchissant.

$$\frac{M_z}{EI_z} = \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \varepsilon y'' \quad (4.9)$$

### 4.9.3 Condition de rigidité

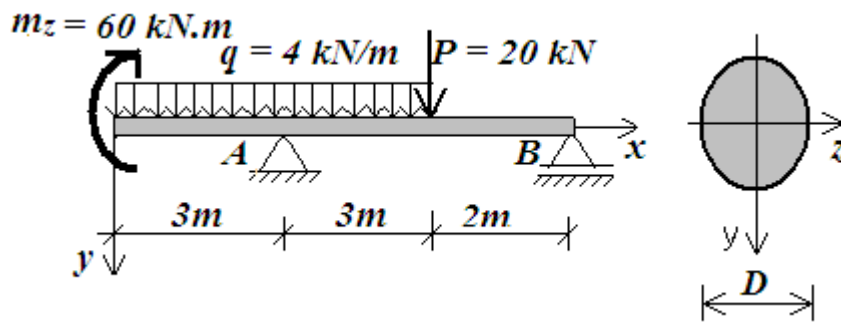
On calcule la flèche maximale et on vérifie ensuite que cette flèche reste inférieure à une valeur limite  $f_{\text{lim}}$ .

$$y_{\text{max}} \leq f_{\text{lim}}$$

**Exemple 4.3**

Soit une poutre en acier de section transversale ronde, comme le montre la figure ci-dessous.

- 1- Calculer les réactions aux appuis.
- 2- Tracer les diagrammes des efforts intérieurs tout au long de la poutre.
- 3- Pour la section où le moment fléchissant est maximal, tracer la distribution des contraintes normale et tangentielle tout au long de la section transversale de la poutre.
- 4- Déterminer le diamètre  $D$  de la section si  $[\sigma]=1600 \text{ kg/cm}^2$ ,  $[\tau]=1100 \text{ kg/cm}^2$ .



**Solution 4.2**

1- Réactions aux appuis

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow R_{Ax} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow R_{Ay} + R_B = 44 \text{ kN} \\ \sum M /_A = 0 &\Rightarrow R_B = 24 \text{ kN} \\ \sum M /_B = 0 &\Rightarrow R_{Ay} = 20 \text{ kN} \end{aligned}$$

Vérification

$$R_{Ay} + R_B = 44 \text{ kN} \Leftrightarrow 20 + 24 = 44$$

2- Diagrammes des efforts intérieurs

Section 1-1  $0 \leq x \leq 3 \text{ m}$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = -4x \quad d'ou \begin{cases} T_y(x=0) = 0 \\ T_y(x=3) = -12 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\sum M /_C = 0 \Rightarrow M_z = 60 - 2x^2 \quad d'ou \begin{cases} M_z(x=0) = 60 \text{ kN.m} \\ M_z(x=3) = 42 \text{ kN.m} \end{cases}$$

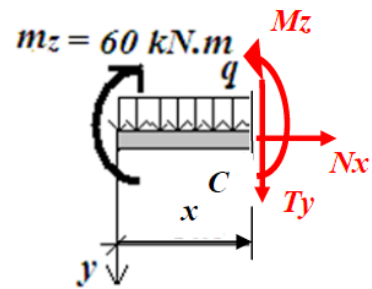


Fig. E2.5-b

**Section 2-2**  $3 \leq x \leq 6m$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = 20 - 4x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_y(x=3) = +8kN \\ T_y(x=6) = -4kN \end{cases}$$

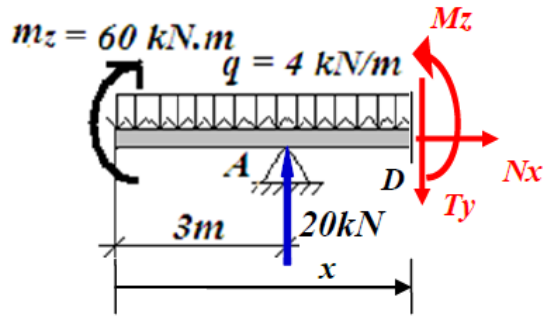


Fig. E2.5-c

$$\sum M /_D = 0 \Rightarrow M_z = 60 + 20(x-3) - 2x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_z(x=3) = 42kN.m \\ M_z(x=6) = 48kN.m \end{cases}$$

$$T_y = 0 \Rightarrow x = 5m$$

$$M_z^{max} = M_z(x=5m) = 50kN.m$$

**Section 3-3**  $6 \leq x \leq 8m$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = -24kN$$

$$\sum M /_E = 0 \Rightarrow M_z = 24(8-x) \text{ d'où } \begin{cases} M_z(x=6) = 48kN.m \\ M_z(x=8) = 0 \end{cases}$$

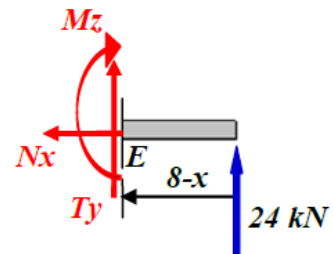


Fig. E2.5-d

