Prolongement par continuité

Dédou

Mars 2011

Exemple

On considère la fonction $f := x \mapsto \frac{\sin x}{x}$. Elle est définie en dehors de 0, mais elle a une limite en 0, à savoir 1. Alors la fonction

$$x \mapsto \quad \text{si} \quad x = 0 \quad \text{alors} \quad 1 \quad \text{sinon} \quad \frac{\sin x}{x}$$

prolonge "continûment" f en 0.

La notation qu'on préfère pour un tel prolongement est $\hat{f}$.

Restriction et prolongement

Définition

Soit f une fonction et I une partie de DDf.

- La restriction de f à I est la fonction définie sur I (et pas ailleurs) par $x \mapsto f(x)$.
- Inversement, si g est la restriction de f à I, on dit que f prolonge g à DDf.
- Si a est dans DDf mais pas dans I, on dit que f prolonge g en a.

Exemple

La fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ prolonge à $\mathbb{R}$ tout entier la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

Exo 1

Donnez un prolongement de $x \mapsto \sqrt{x+1}$ à $\mathbb{R}$ tout entier.

Prolongement par continuité

Proposition

Soit I un intervalle, et a un point de I. soit f définie sur $I - \{a\}$ et ℓ un nombre. On pose

$$\hat{f} := x \mapsto \quad \text{si} \quad x = a \quad \text{alors} \quad \ell \quad \text{sinon} \quad f(x).$$

Alors $\hat{f}$ est continue en a ssi la limite de f en a est ℓ.

Exemple

La fonction

$$x \mapsto \quad \text{si} \quad x = 0 \quad \text{alors} \quad 2 \quad \text{sinon} \quad \frac{\sin x}{x}$$

est discontinue en 0.

Exercice

Exo 2

Prolongez continûment en zéro la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{\ln x}$.