Cours de Mathématiques pour première année licence ST et SM

Chapitre 3 : Les fonctions à variables réelles

AYADI SOUAD

01 AVRIL 2019
1.0

Table des matières

Objectifs

Les objectifs de ce cour se résumes en particulier au points suivant

- *La préparation* pour le cour des primitives
- *Consolider* les connaissance sur les fonctions
- *Étudier* de nouvelle forme in déterminer
- *Connaître* de nouveaux théoremes pour le calcul des dérivées

Introduction

Ce cour est indésponsable dans toute discipline de la première année L1 des sciences technique. Il constitue un achèvement du cour d'analyse vue au lycée, comme il est une étape indispensable pour entamer des cour d'analyse avancées en particulier le calcul intégrale. Le calcul des limites à l'infini et aux points particulier est la première partie de ce chapitre pour arriver au calcul de dérivées et les différents théorèmes qui font le lien entre le calcul de limites et dérivées.

«

Pour entamer ce cour, nous aurons besoin

- Le calcul dans \mathbb R
- Calcul de limites des fonctions élémentaires
- les propriétés des fonctions exponentielles

»

Exercice : Près-Test

I

Test des Près-Requis

Verifier si les résultats suivants sont vris ou faux

Près-test

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \mapsto +\infty} 2\frac{\ln x}{x} = 2 \times \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Par somme :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} 1 - 2\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 1$$

Par produit :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} x\left(1 - 2\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right) = \lim_{x \mapsto +\infty} x - \ln(x^2+1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (1-x)e^x = \lim_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (1-x)e^x = \lim_{x \to -\infty} (1-x) = 0$$

$$= \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (1-x)e^x = \lim_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$$

$$= \begin{matrix} \lim\limits_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \end{matrix}$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

II

Chapitre 3 : Les fonctions à variables réelles

1. Limites

1.1. Opérations sur les limites

f(x)	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0	0	l
$g(x)$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	0	l'	0
$f(x)+g(x)$	$l+l'$	$+\infty$	FID	0	l'	l
$f(x).g(x)$	$l.l'$	$+\infty$	$-\infty$	0	0	0
$f(x)/g(x)$	l/l'	FID	FID	FID	0	∞

1.2. Propriétés élémentaires

$Proposition1$: soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a telles que :

1. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$,
2. g est bornée au voisinage de a

Alors : $\lim_{x \to a} f(x).g(x) = 0$

Exemple

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad g(x) = \sin \frac{1}{x}$$

$Proposition2$: soient f , g et h trois fonctions définies au voisinage de a telles que :

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = l$ alors $\lim_{x \to a} g(x) = l$.

1.3. Formes indéterminées

On a les formes indéterminées suivantes :

$$\infty \times \infty, 0 \times \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$$

Remarque

Les formes $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ se ramène à la forme $0 \times \infty$

$Proposition3$: Soient f et g deux fonction définies au voisinage de a. supposons que

$f(x) \neq 1$ et $\lim_{x \to a} f(x) = 1, \lim_{x \to a} g(x) = \infty,$

Alors:

$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = 1^{\infty}$, se présente sous la forme indéterminée si :

$\lim_{x\to a}(f(x)-1).g(x)=l$ alors $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^l$

Exemple

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^1=e.$$

En effét:

$f(x)=(1+x),\ g(x)=\frac{1}{x},\ \lim_{x\to 0} f(x)=1,\ \lim_{x\to 0} g(x)=\infty,\ \lim_{x\to 0}(f(x)-1).g(x)=1.$

2. Continuité

Définition

Soit f une fonction définie sur D_f. On dit que f est continue en a si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

Si f est continue en tout point x de intervalle I alors elle est continue sur I.

: Les fonctions usuelles sont continues sur leur domaines de définitions.

2.1. Prolongement par continuité

f une fonction définie sur D_f et non continue en a.

Si $\lim_{x\to a}=l,\ \ l\in\mathbb{R},$

alors on peut prolonger f par continuité en a par la fonction $\tilde{f}$ tel que

$$\tilde{f}(x)=f(x)\ \text{si}\ x\neq a\ \ \text{et}\ \ \tilde{f}(a)=l.$$

Exemple

$f(x)=xlnx$

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$

$\tilde{f}(x)=xlnx,\ \ \text{si}\ x>0,\ \ \text{et}\ \tilde{f}(0)=0.$

$Exercice$: soit f une fonction définie par

$cx+1,\ \ \text{si}\ \ x\leq 3\ \ \text{et}\ \ cx^2-1,\ \ \text{si}\ \ x>3$

Trouver c pour que f soit continue en 3.

3. Dérivabilité

3.1. Dérivée en un point

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f: \quad I \longrightarrow \mathbb{R}$, et$a \in I$.

On dit que f est dérivable en a si et seulement si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a.

Cette limite s'appelle le nombre dérivée de f en a noté $f'(a)$ et on écrit

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Si f est dérivable en tout point x de I alors f est dérivable sur$I$ et f' est la fonction dérivée de f sur I.

Complément : Interprétation graphique

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Si f est dérivable en a alors (C_f) amet au point d'abscisse a une tangente de pente $f'(a)$. l'equation de la tangente est:

$$(\delta): \quad y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

3.2. Opérations sur les dérivées

Soit$f$ et g deux fonctions dérivables sur I.

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(\lambda f)' = \lambda f'$
- $(f.g)' = f'.g + g'.f$
- $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}, \quad g(x) \neq 0$

3.2.1. les dérivées usuelles

Dans cette partie, pour chaque fonction f on donne sa dérivée f'.

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

3.2.2. les dérivées usuelles

$f(x))$	$f'(x)$
x^n	$nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
e^x	e^x

3.2.3. Dérivée d'une fonction composée

Proposition : Si f est dérivable en a et g dérivable en $f(a)$ alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et on a $(g \circ f)'(a) = f'(a).g'(f(a))$.

On a les dérivées suivantes

Fonction	**Dérivée**
U^n	$n.U'.U^{n-1}$
$\frac{1}{U}$	$\frac{U'}{U^2}$
$\sqrt{U}$	$\frac{U}{2\sqrt{U}}$
$\exp U$	$U' \exp U$
$\ln U$	$\frac{U'}{U}$
$\cos U$	$-U' \sin U$

$\sin U$	$U' \cos u$
$\tan U$	$\dfrac{U'}{\cos^2 U}$

Exemple

vedeo

3.2.4. Dérivée de la fonction réciproque

Soit I est un intervalle et soit $f : \quad I \longrightarrow J$, une fonction bijective et dérivable sur$I$.

Si f ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur$J$, et on a:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Exemple

f\colon\quad$]1 \ + \infty[\longrightarrow]-1 \ + \infty[$

$f(x) = xlnx - x$

Montrer que f est bijective et calculer f'^{-1}(0).

Réponse :

D'abord on résout l'équation $f^{-1}(0) = x$.

$f^{-1}(0) = x \Leftrightarrow f(x) = 0,$

on trouve $x = 0oux = e$. Comme $0 \notin]1 \ + \infty[\ onprendx = e.$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\ln(e)} = 1.$$

3.2.5. Dérivées successives

Soit$f$ une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit f' sa dérivée.

Si f' est dérivable sur I, on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f. Si f'' est dérivable sur$I$ on note $f^{(3)} = (f'')'$.

Si f est n fois dérivable sur$I$ on note la dérivée d'ordre n par $f^{(n)}$ avec $n \in \mathbb{N}, \text{ et } f^{(0)} = f.$

Fondamental : Formule de Leibniz

Formule deLeibniz* : Soit f et g deux fonctions définies et n fois dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $f.g$ est n fois dérivable sur I et on a:

$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$

Méthode : Règle de l'Hôpital

Règle de l'Hôpital* : Supposons f et$g$ deux fonctions dérivables sur $]ab[\text{ avec } g(x) \neq 0 \forall x \in]a\, b[$.

Si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$, alors $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f''(x)}{g''(x)} = ...$

3.3. Test d'auto évaluation

Exercice : qcu.01 [*solution* n°1 p.14]

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x + 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

- ○ vrai
- ○ faux

Exercice : qcu.02 [*solution* n°2 p.14]

$$\lim_{x \to 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = e^2$$

- ○ vrai
- ○ faux

Exercice : c.03 [*solution* n°3 p.14]

Que donne La formule de Leibniz pour $n = 1$

Exercice : qcm.05 [*solution* n°4 p.14]

Une fonction qui est continue en x_0

- ☐ est dérivable en x_0
- ☐ On ne peut rien dire concernant la dérivabilité

3.4. Évaluation, orientation, remédiation

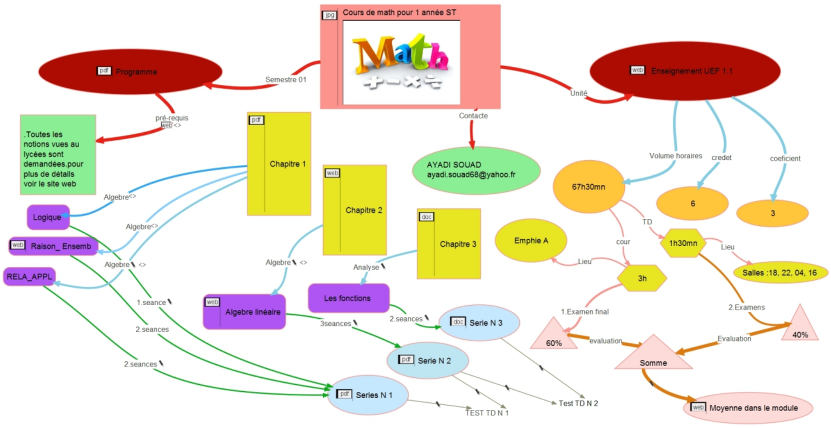
Exercices : résoudre les exercices du *document pdf*

[cf. Exo-chap3]

Orientation : consulter la référence*

Remédiation : voir la *vedeo*

Le cour du module math 1 a été conçu selon la carte conceptuelle suivante



Carte conceptuelle du cour

Solutions des exercices

> **Solution** n°1

Exercice p. 12

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x + 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

- ○ vrai
- ⦿ faux

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x + 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

> **Solution** n°2

Exercice p. 12

$$\lim_{x \to 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = e^2$$

- ⦿ vrai
- ○ faux

> **Solution** n°3

Exercice p. 12

Que donne La formule de Leibniz pour $n = 1$

dérivée usuelle

> **Solution** n°4

Exercice p. 12

Une fonction qui est continue en x_0

- ☐ est dérivable en x_0
- ☑ On ne peut rien dire concernant la dérivabilité

la dérivabilité donne la continuité mais l’inverse n'est pas toujours vrai

Glossaire

glossair02

Gottfried Wilhelm Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz, né à Leipzig le 1er juillet 1646 et mort à Hanovre le 14 novembre 1716, est un philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand. Wikipédia

Date et lieu de naissance : 1 juillet 1646, Leipzig, Allemagne

Date et lieu de décès : 14 novembre 1716, Hanovre, Allemagne

Influencé par : René Descartes, Baruch Spinoza, Aristote, PLUS

Enseignement : Université de Leipzig, Université d'Altdorf, Université d'Iéna

Parents : Friedrich Leibnütz, Catharina Schmuck

glossaire01

Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital

Guillaume François Antoine de L'Hôpital, parfois orthographié de L'Hospital, marquis, est un mathématicien français. Il est connu pour la règle qui porte son nom : la règle de L'Hôpital, qui permet de calculer la valeur d'une limite pour une fraction où le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers zéro. Wikipédia

Date et lieu de naissance : 1661, Paris, France

Date et lieu de décès : 2 février 1704, Paris, France

Renommé pour : Travaux sur le calcul différentiel

Connu pour : Calcul infinitésimal, Differential geometry of curves, Règle de L'Hôpital

Conseiller pédagogique : Jean Bernoulli

Références

Chapitre 3 http://exo7.emath.fr/cours/livre-analyse-1.pdf

Bibliographie

K. Allab, Eléments d'analyse, Fonction d'une variable réelle, 1re & 2e années d'université, Office des Publications universitaires, 2012

Algèbre et Analyse, cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, Stéphan Blac, 2003