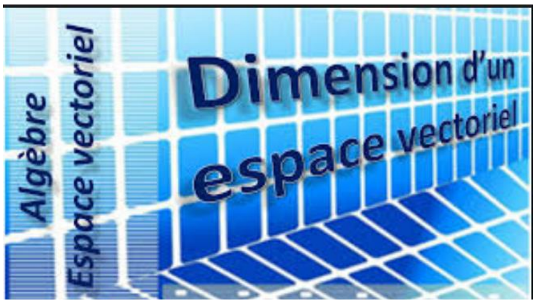
Cours de Mathématiques pour première année licence ST et SM

Chapitre 2 : Algèbre Linéaire



AYADI SOUAD

01 AVRIL 2019
1.0

Table des matières

Objectifs

Ce cour vise à

- *Introduire* les structures algébriques
- *Consolider* les notions de base sur les espaces vectoriels
- *Assimiler* les propriétés des applications linéaires
- *Connaître* le théorème fondamental de la dimension

Introduction

L'algèbre linéaire* est la branche des mathématiques qui s'intéresse aux espaces vectoriels et aux transformations linéaires, formalisation générale des théories des systèmes d'équations linéaires. L'algèbre linéaire est un domaine très vaste c'est pour cela que nous allons donner uniquement les notions importantes pour un étudiant de la première année science technique.

Ce cour portera sur deux notions essentielles en mathématiques : les espaces vectoriels et les applications linéaires.

«

Pour suivre ce cour l'étudiant aura besoin :

- les notions élémentaires sur les vecteurs
- les applications
- La résolution de système linéaire simple

»

Exercice : Test des Prés-Requis

I

[solution n°1 p.16]

Exercice

la somme de deux vecteurs est un vecteur

- oui
- non
- on ne peut rien confirmer

Exercice

toute application bijective vérifie les propriétés suivantes

- [ ] injective et surjective à la fois
- [ ] admet une application réciproque
- [ ] l'application réciproque est bijective
- [ ] l'équation f(x) = y n'admet pas toujours une solution

Chapitre 2 : Algèbre Linéaire

II

1. Les structures Algébrique

1.1. Les lois de compositions internes

Définition

Soit E un ensemble on définit une loi de composition interne dans$E$ par une relation $P(x, y)$ tel que :

$\forall x \in E, \forall y \in E: \ P(x, y) \in E.$

On note la loi $P(x, y)$ par $x \star y$ ou $x \Delta y$ ou $x \top y$ ou $x + y, \ldots.$

Exemple

1. La loi$+$ est interne dans $\mathbb{N}$
2. La loi$+$ est interne dans $\mathbb{N}$
3. La loi $-$ n'est pas interne dans $\mathbb{N}$
4. On définit la loi $\star$ pa :$x \star y = \dfrac{x+y}{2}$

Calculer $1 \star 1, \ 1 \star 3, \ 2 \star 3.$

1.2. Propriétés des lois de composition interne

1.2.1. Commutativité

Soit $\star$ une loi de composition interne sur un ensemble non vide E. On dit que la loi $\star$ est commutative dans E si est seulement si

$$\forall x \in E, \forall y \in E: \ x \star y = y \star x.$$

Exemple

Soit $\star$ une loi définit sur $\mathbb{Z}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}: \ x \star y = 2x + 3y + 1.$$

$\star$ est elle commutative ?

1.2.2. Associativité

Soit $\star$ une loi de composition interne sur un ensemble non vide E. On dit que la loi $\star$ est associative si et seulement si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E: \ (x \star y) \star z = x \star (y \star z).$$

1.2.3. Distributivité

Soient $\star$ et $\top$ deux lois de composition internes sur un ensemble non vide E. On dit que la loi $\star$ est distributive par rapport à $\top$ si et seulement si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E: \ x \star (y \top z) = (x \star y) \top (y \star z).$$

1.2.4. Élément neutre

Soit $\star$ une loi de composition interne sur un ensemble non vide E. On dit que $e \in E$ est un élément neutre pour la loi $\star$ si et seulement si $\forall x \in E: \ x \star e = e \star x = x$.

Exemple

1. 0 est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{R}$.
2. 1 est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{R}$.

1.2.5. Élément inversible

Soit $\star$ une loi de composition interne sur un ensemble non vide E, et e l'élément neutre pour cette loi.

On dit que l'élément est l'inverse de x dans E si et seulement si $x \star x' = x' \star x = e$.

Remarque

- On dit aussi que x' est le symétrique de x dans E par rapport à $\star$
- Si l'élément neutre existe alors il est unique
- Si l'élément a est inversible alors l'équation $x \star a = b$ admet une solution unique.

1.3. Structure de corps

1.3.1. Structure de groupe

Soit E un ensemble non vide munit d'une loi de composition interne$\star$. On dit que $(E, \star)$ est un groupe si et seulement si et seulement si :

$\star$ est associative

$\star$ admet un élément neutre dans E

Tout élément de E est inversible par rapport à $\star$

Si de plus $\star$ est commutative on dit que $(E, \star)$ est un groupe Abélien ou groupe commutatif.

Exemple

- $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe Abélien
- $(\mathbb{R}, -)$ est un groupe Abélien
- $(\mathbb{R}, \times)$ n'est pas un groupe

Fondamental : Sous groupe

Soit $(E, \star)$ un groupe et $H \subset E$. On dit que H est un sous groupe de $(E, \star)$ si et seulement si H est stable pour la loi $\star$ .c.a.d $\forall x \in H, \forall y \in H : \ x \star y \in H.$

- $(H, \star)$ est lui meme un groupe.

Exemple :

$(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}, \times)$.

Complément : Carractéristiques d'un sous groupe

H est un sous groupe de $(E, star)$ si et seulement si :

$H \neq \emptyset$

$\forall x \in H, x^{-1} \in H$

$\forall x \in H, \forall y \in H : \ x \star y \in H.$

1.3.2. Structure d'anneaux

Soit E un ensemble munit de deux lois de composition internes $\star$ et $\top$. On dit que $(E, \star, \top)$ est un anneau si et seulement si

1. $(E, \star)$ est un groupe Abélien
2. La loi $\top$ est distributive par rapport à $\star$
3. E possède un élément neutre pour la loi $\top$
   Si de plus $\top$ est commutative, alors l'anneau $(E, \star, \top)$ est commutatif.

1.3.3. Les corps

On dit que $(E, \star, \top)$ est un corps si et seulement si :

1. $(E, \star, \top)$ est un anneau commutatif

2. Tout élément de $E - \{e\}$ est inversible par rapport à $\top$.

2. Les espaces vectoriels

2.1. Espaces et sous espaces vectoriels

Définition

Soit E un ensemble et K un corps. On munit$E$ d'une loi de composition interne notée $+$ et une loi de composition externe noté $\cdot$ définie par : $\forall x \in E, \forall \lambda \in K: \; x \cdot \lambda \in E.$

On dit que E est un espace vectoriel sur K si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.

1. $(E, +)$ est un commutatif
2. $\forall x, y \in E, \forall \alpha \in K: \; \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
3. $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in E: \; (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
4. $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in E: \; \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$
5. $\forall x \in E: \; 1 \cdot x = x$

Fondamental

Si E est un espace vectoriel sur K alors les éléments de E sont appelés des vecteurs. On les notes $u, v, w, \ldots$

Définition : Sous espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel sur le corps K, et $H \subset E$. On dit que E est un sous espace vectoriel de E si et seulement si

1. $H \neq \emptyset$
2. $\forall u \in H, \forall v \in H: \; u + v \in H$
3. $\forall u \in H, \forall \alpha \in K: \; \alpha \cdot u \in H.$

2.2. Base et dimension

2.2.1. Famille libre et liées

Définition

Soit E un espace vectoriel et $v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots, v_n$, une famille de vecteurs de E.

On dit que les vecteurs $v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots, v_n$, sont linéairement indépendant si et seulement si

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots.\alpha_n u_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. = \alpha_n = 0$

Si les vecteurs $v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots, v_n$, sont linéairement indépendant alors la famille $\{v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots, v_n\}$ est dite une famille libre de E. Si la famille n'est pas libre alors elle est dite liée.

2.2.2. Famille génératrice

Soit la famille $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ de l'espace vectoriel E.

On dit que la famille $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ est génératrice de E si et seulement si tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire des $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$

c.a.d $\forall u \in E: \ u = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i v_i$.

On dit aussi que E est engendré par les vecteurs $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ et on écrit aussi $E = \langle v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\rangle$.

Exemple

$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad x + y = 0\}$

Déterminer une famille génératrice de H.

Réponse :

$\forall u \in H: \ u = y(-1, 1, 0) + z(0, 0, 1)$

Donc $H = \langle(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\rangle$

2.2.3. Base et dimension

Soit E un espace vectoriel, et $B = \{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ une famille de n vecteurs de E.

On dit que B est une base de E si et seulement si

1. B est une partie génératrice de E
2. B est une famille libre de E

Si B est une base de E on dit que E est de dimension n et on écrit $dim\, E = n$.

Exemple

$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad 3x - y + z = 0\}$

Montrer que H est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer une base de H et la dimension de H.

Complément

Voir le *document PDF*

Méthode

La *vedeo04* donne une bonne méthode pour démontrer que des vecteurs forment une base.

Cf. "vedeo04"

Pour consolider les connaissances le document Exo_esp_vect (cf. Exo_esp_vect.pdf)

[cf.]

3. Applications Linéaires

3.1. Définitions et propriétés

Définition

Soit E et F deux espaces vectoriels sur le corps K. On appelle application linéaire toute application

$f: \quad E \longrightarrow F$ vérifiant $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Remarque

f linéaire $\Leftrightarrow \forall x \in E, \forall y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}: \ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Conseil

Si f est linéaire alors $f(0) = 0$

Attention

Si $f(0) = 0$ rien ne confirme que f est linéaire, il faut vérifier les conditions de linéarité.

Exemple

$f: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longmapsto 2x + y$

Montrer que f est linéaire

Calculer $f(0,0), f(-1,-1), f(-2,3)$

Exercice corrigé

3.2. Noyau et image d'une application linéaire

Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle noyau de f l'ensemble des éléments x de E qui vérifient $f(x) = 0$ et on le note $ker f$.

$ker f = \{x \in E: \ f(x) = 0\}$

On appelle image de f l'ensemble des vecteurs de F qui sont images des vecteurs de E et on le note $Im f$.

Imf = \lbrace x \in F \colon y= f(x) \, \mbox{ et } x \in E \rbrace

$Im f$ est un sous espace vectoriel de$F$.

On appelle rang de l'application f la dimension de $Im f$ et on écrit $rang\, f = dim\, Im f$.

Fondamental

On a le théorème fondamental du $rang$.

$dim\, ker f + dim\, Im f = dim\, E$

Méthode

f injective $\Leftrightarrow ker f = \{0_E\}$

$ker f = \{0_E\} \Leftrightarrow dim\, ker f = 0$

f surjective $\Leftrightarrow dim\, Im f = dim\, F$

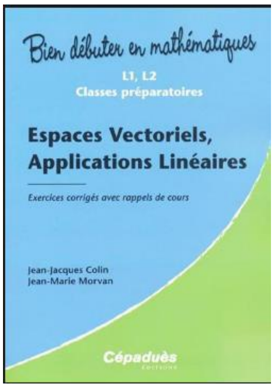
f bijective $\Leftrightarrow dim\, Im f = dim\, F = dim\, E.$

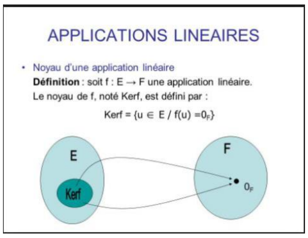
Complément

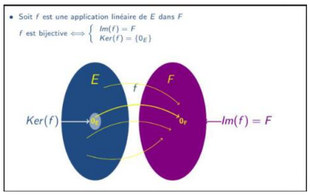
Consulter la *vedeo05*

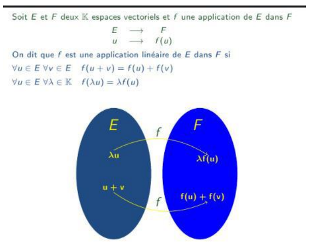
Cf. "vedeo05"

Image _App_Lineaires









3.3. Evaluation, orientation, remédiation

3.3.1. Evaluation

Exercices

Orientation*

Remediation *lien*

Remediation *cour en ligne*

Solutions des exercices

> **Solution** n°1

Exercice p. 5

Exercice

la somme de deux vecteurs est un vecteur

- (x) oui
- ( ) non
- ( ) on ne peut rien confirmer

Exercice

toute application bijective vérifie les propriétés suivantes

- [x] injective et surjective à la fois
- [x] admet une application réciproque
- [x] l'application réciproque est bijective
- [x] l'équation f(x) = y n'admet pas toujours une solution

réponse juste 1, 2,3.

Glossaire

Algèbre linéaire

L'histoire de l'algèbre linéaire commence avec Al-Khawarizmi qui a traduit des textes de mathématiques indiens, réinterprété les travaux de l'école grecque et qui est la source du développement conscient de l'algèbre qui s'étendra pendant des siècles après lui1. Elle a été reprise par René Descartes qui pose des problèmes de géométrie, comme la détermination de l'intersection de deux droites, en termes d'équation linéaire, établissant dès lors un pont entre deux branches mathématiques jusqu'alors séparées : l'algèbre et la géométrie. S'il ne définit pas la notion de base de l'algèbre linéaire qu'est celle d'espace vectoriel, il l'utilise déjà avec succès, et cette utilisation naturelle des aspects linéaires des équations manipulées demeurera utilisée de manière ad hoc, fondée essentiellement sur les idées géométriques sous-jacentes. Après cette découverte, les progrès en algèbre linéaire vont se limiter à des études ponctuelles comme la définition et l'analyse des premières propriétés des déterminants par Jean d'Alembert.

Références

Chapitre 1,2 http://exo7.emath.fr/

Chapitre 1,2 http://exo7.emath.fr/cours/livre-algebre-1.pdf

Bibliographie

J. Rivaud, Algèbre : Classes préparatoires et Université Tome 1, Exercices avec solutions, Vuibert, 1978.

M. Balabne, M. Duflo, M. Frish, D. Guegan, Géométrie – 2e année du 1er cycle classes préparatoires, Vuibert Université, 1982.

J. Quinet, Cours élémentaire de mathématiques supérieures 1- Algèbre, Dunod, 1993.

Algèbre et Analyse, cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, Stéphan Blac, 2003