TS : correction du TD - Différents types de raisonnements utilisés en mathématiques

I Quantificateur existentiel

Exercice : « il existe un entier naturel n tel que n^2 soit supérieur à 23. »s'écrit :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 > 23.$$

II Quantificateur universel

Exercice : la proposition : « le carré de tout nombre réel est positif ou nul. »s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0.$$

III Négation

Exercice

Écrire la négation des propositions suivantes et préciser laquelle est vraie.

1. $P : \forall x \in \mathbb{R},\ x+1 > x$
   $\overline{P} : \exists x \in \mathbb{R},\ x+1 \leqslant x$
   P est vraie, car $x+1 > x \Leftrightarrow 1 > 0$ (en soustrayant x des deux côtés)
2. $P : \forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{x^2+1} < 1$
   $\overline{P} : \exists x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{x^2+1} \geqslant 1$
   $\overline{P}$ est vraie car, pour $x = 0$, $\dfrac{1}{x^2+1} = 1$.
3. P : Tout triangle est rectangle.
   $\overline{P}$: il existe un triangle non rectangle.
   $\overline{P}$ est vraie, car les triangles équilatéraux ne sont jamais rectangles (trois angles de $\dfrac{\pi}{3}$ radians)
4. P : Tout carré est un losange.
   $\overline{P}$: il existe un carré qui ne soit pas un losange.
   P est vraie ; les carrés sont des losanges particuliers.
5. P : tout nombre premier est impair.
   $\overline{P}$: il existe un nombre premier pair.
   $\overline{P}$ est vraie, car 2 est premier et pair (seul nombre premier pair).
6. P : Il existe un réel x tel que $x^2+x+1=0$
   $\overline{P}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+x+1 \neq 0$
   $\overline{P}$ est vraie, car $\Delta = -3 < 0$

IV Raisonnement par contre-exemple

Exemple :

Soit la propriété P : « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+2x+1 \neq 0$. On veut montrer que cette proposition est fausse.
Il est équivalent de montrer que la proposition contraire non P $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2+2x+1=0$ est vraie.
Autrement dit, il suffit d'exhiber un réel x rendant nulle l'expression x^2+2x+1.

$x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1$; l'expression s'annule pour $x=-1$.

V Raisonnement par contraposée

Exercice :

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, n impair $\Rightarrow n^2$ impair.
   En effet : si n est impair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$. Alors $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2+4p+1 = 2\left(2p^2+2p\right)+1 = 2q+1$ en posant $q = 2p^2+2p \in \mathbb{N}$.
   n^2 est donc impair
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 impair $\Rightarrow n$ impair.
   Cela équivaut à montrer que si n est pair, alors n^2 est pair.
   Si n ets pair, $n = 2p$ donc $n^2 = 4p^2 = 2 \times 2p^2$ donc n^2 est pair.
3. Ces deux propriétés se traduisent par une éuivalence :
   n impair $\Leftrightarrow n^2$ impair

Exercice :
Démontrer la proposition « Soit x un nombre réel tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $x \leqslant \varepsilon$. Alors $x \leqslant 0$. »

On montre la contraposée : si $x > 0$, i existe $\varepsilon > 0$ tel que $x > \varepsilon$.

Il suffit de prendre $x = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

VI Raisonnement par l'absurde

Définition :

Le raisonnement par l'absurde est une forme de raisonnement logique, consistant soit à démontrer la vérité d'une proposition en prouvant l'absurdité de la proposition contraire, soit à montrer la fausseté d'une proposition en déduisant logiquement des conséquences absurdes.

Exercice : démontrer que l'ensemble I des rationnels strictement supérieurs à 1 n'a pas de plus petit élément

VII Raisonnement par récurrence

Nous avons vu ce type de raisonnement en cours.

VIII Raisonnement par disjonction des cas

Définition :

Lors d'un raisonnement par disjonction des cas, on étudie tous les cas possibles en faisant au préalable un tri pour restreindre le nombre de cas à étudier.

Exemple : Démontrer que pour tout entier naturel n, le produit $n(n+1)$ est divisible par 2.

- Premier cas : n est pair. $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
  Alors : $n+1 = 2k+1$ et $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2[k(2k+1)] = 2m$ avec $m = k(2k+1) \in \mathbb{N}$.
  $n(n+1)$ est pair.
- Deuxième cas : n est impair. $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.
  Alors : $n+1 = 2k+2 = 2(k+1)$ et $n(n+1) = (2k+1) \times 2(k+1) = 2[(k+1)(2k+1)] = 2p$ avec $p = (k+1)(2k+1) \in \mathbb{N}$.
  $n(n+1)$ est pair.

On en déduit que, dans tous les cas, $n(n+1)$ est pair.