Cours de Mathématiques pour première année licence ST et SM

Chapitre 1 : Notions fondamentales

AYADI SOUAD

01 AVRIL 2019
1.0

Table des matières

Objectifs

A l’issue de ce cour l’étudiant doit être capable de

- *Savoir* comment utiliser les différents types de raisonnement
- *Se famliariser* avec les opérations sur les ensembles
- *Connaître* les différents types de relations
- *Consolider* ses connaissances sur les applications

Introduction

Ce cour est le premier cour de mathématique destiné aux classes de première année universitaires dans toutes les disciplines scientifique et techniques. Il constitue la notion de base qu' à travers laquelle l'étudiant commence à s' intégrer dans les mathématiques supérieures. On commence par introduire des notions de logique et le vocabulaire spécifique au proposition, et on donne les différents types de raisonnement de mathématique qui permettent aux étudiant de faire des démonstrations rigoureuses dans différentes situations. Les ensembles aussi, à leur tour, constitue une notion fondamentale qu'il faut connaître et se familiariser avec. La fin du chapitre permettra à l'étudiant de se consolider ses connaissances sur les application et les fonctions en particulier les notions d'applications bijective et réciproque. Dans ce cour on aura souvent besoin des des ensembles et de leurs propriétés et du calcul dans ces ensembles. Comme il est nécessaire de se rappeler des généralités sur les fonctions.

Exercice : Test des prés-requis

I

[*solution* n°1 p.21]

Exercice

La définition exacte d'un nombre rationnel est

- $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*$
- $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z}^*$
- $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$
- $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*$

Exercice

Un nombre réel est toujours

- rationnel
- rationnel ou irrationnel
- irrationnel

Exercice

Une fonction est une relation qui à chaque élément de l'ensemble de départ fait associer au plus un élément de l'ensemble d'arriver

- vrai
- faux

Chapitre 1 : Notions fondamentales

II

1. Quelques Notions de Logique

1.1. Proposition

On appelle *proposition* et qu'on note par *P* ou *Q,* toute phrase qui est *fausse* ou *vraie.*

- On note une proposition *vraie* par *V* ou *1.*
- On note une proposition *fausse* par *F* ou *0.*

Exemple

- 6 est nombre pair............*V.*
- 9 est un multiple de 2 ....*F*
- x est un nombre positif : *ce n'est pas une proposition.*

1.2. Les opérations sur les propositions

Soient P et Q deux propositions.

- On appelle *disjonction* de P et Q la proposition *P ou Q* qu'on note $P V Q$ et qui est vraie si l'une au moins est vraie.
- On appelle *conjonction* de P et Q la proposition *P et Q* qu'on note et qui est vraie si P et Q sont vraie à la fois.
- On appelle *équivalence* des propositions P et Q, la proposition $P \Longleftrightarrow Q$ qui se lit *P si et seulement Q*. L'équivalence est vraie si P et Q sont vraies à la fois ou fausses à la fois.
- On appelle la négation de P qu'on note $\overline{P}$ la proposition qui est vraie quand P est fausse.
- On appelle implication la proposition $\overline{P} \vee Q$ et qu'on note $P \Rightarrow Q$. L'implication est fausse dans le seu cas ou P est vraie et Q fausse.

1.3. Raisonnement

1.3.1. Prédicat

Soit E un ensemble ($\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$). On appelle prédicat sur E tout énoncé qui contient un inconnue x ou plusieurs et si on remplace x par un élément fixé de E on obtient une proposition fausse ou vraie. on note les prédicats par $p(x), q(x), \ldots$

Exemple

$P(x)$:x est un multiple de 3 ,$x \in \mathbb{Z}$.

$Q(x)$: n est un nombre impaire $n \in \mathbb{N}$.

1.3.2. Les quantificateurs

Soit E un ensemble et $p(x)$ un prédicat et$x \in E$.

- Dire que $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$ se note, $\forall x \in E: \quad P(x)$.
- Dire qu'il existe un x dans E pour lequel $P(x)$ est vraie se note, $\exists x \in E: \quad P(x)$.
- Le symbole $\forall$ s'appelle quantificateur *universel* et le symbole $\exists$ s'appelle quantificateur *existentiel.*

Exemple

Écrire les phrases suivantes en utilisant les quantificateurs.

1. Le carré de tout nombre est positive.
2. Pour tous nombres réels le carré de la somme de deux nombres est égale à la somme de leurs carrés.
3. Tout nombre entier admet un opposé.
4. Il existe au moins un nombre entier qui est opposé à tous les nombres entiers.

Solution :

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$.............vraie.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x+y)^2 = x^2 + y^2$ ....fausse.
3. $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} \quad x + y = 0$ ....vraie.
4. $\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z} \quad x + y = 0$............. fausse.

Complément : La négation d'un quantificateur

La de $\forall x \in E: \quad P(x)$ est $\exists x \in E: \quad \overline{P}(x)$.

La *négation* de$\exists x \in E: \quad P(x)$ est : $\forall x \in E \quad \overline{P}(x)$.

exemple :

la *négation* de $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq,$ est $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 < 0$.

La *négation de*$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} \quad x + y = 0$ est $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z} \quad x + y \neq 0$.

1.4. Méthodes de raisonnement

1.4.1. Raisonnement direct

1. Pour montrer qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est vraie il suffit de supposer que P est vraie et de montrer que Q est aussi vraie.
2. Pour montrer que l'équivalence $P \Longleftrightarrow Q$ est vraie il suffit de montrer que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont vraies à la fois.

1.4.2. Raisonnement indirect

a) Raisonnement par l'absurde

Pour montrer que $P(x)$ est vraie on suppose qu'elle est fausse et on aboutit à une *contradiction.*

Exemple :

Montrer que pour tout entier naturel n on a $n^2 \text{pair} \Rightarrow n pair.$

Démonstration :

On suppose que n est impair donc il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1.$ On a alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 1) + 1.$ C'est une contradiction avec n^2 pair. Alors n est pair.

b) Raisonnement par contraposée

Pour montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie on démontre que $\overline{Q} \Rightarrow P$ est vraie.

Exemple :

Montrer que :$(x \neq 1 \text{ et } y \neq 2) \Rightarrow (xy - 2x - y + 2 \neq 0).$

Démonstration :

on montre que : $(xy - 2x - y + 2 = 0) \Rightarrow (x = 1 \text{ ou} x = 2).$

On a :

$xy - 2x - y + 2 = 0 \Rightarrow y(x - 1) - 2(x - 1) = 0,$

et par suite on a $(x - 1)(y - 2) = 0$ et on trouve $x = 1$ ou $y = 2.$

c) Raisonnement par récurrence

On utilise le raisonnement par récurrence dans l'ensemble $\mathbb{N}$ pour montrer qu'une proposition de la forme $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}.$

Dans un résonnement par récurrence on passe par deux étapes :

1. *L'étape de vérification :* on vérifier que P(n_0) est vraie ou n_0 est le premier élément de E.
2. *L'étape d'hérédité :* on suppose que P(n) est vraie pour un certain $n \geq n_0$ et on démontre que la proposition $(P(n) \Rightarrow P(n + 1))$ est vraie.

Exemple

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}.$

d) Raisonnement par contre exemple

C'est un type de raisonnement qu'on utilise pour démontrer que la proposition $\forall x \in E \quad p(x)$ est fausse.

Il suffit de trouver un x_0 dans E pour lequel $p(x)$ n'est pas vérifier.

Exemple

Voir cette référence pour l'exemple*

Complément

Une technique de résolution voir la *vedeo02*

Cf. "vedeo02"

1.5. Exercice : Evaluation

Choisir la méthode de raisonnement convenable pour démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel et démontrer le.

2. Ensembles- Relations- Applications

2.1. Ensembles

2.1.1. Inclusion et égalité

Définition

Soient E et$F$ deux ensembles. On dit que E est *inclus* dans F si tout élément$x$ de$E$ *appartient* à F et on écrit :
$E \subset F \iff \forall x\, x \in E \Rightarrow x \in F.$

On dit que $E = F$ *si et seulement si* E \subset F et F \subset E.

2.1.2. Complémentaire d'un ensemble

Soit E un ensemble et$A$ une partie de E (A\subset E). On appelle *complémentaire* de A dans E l'ensemble des éléments de E qui *n'appartiennent pas* à A et on le note $\complement_E^A$ ou $\overline{A}$ ou A^c.

$\complement_E^A = \{x \in E,\ x \notin A\}$

Remarque

$\complement_E^E = \emptyset$

2.1.3. Intersection - Réunion

Soit E un ensemble non vide et A, B deux parties de E.

L'intersection des deux ensemble A et B est l'ensemble $A \cap B$ défini par :

$A \cap B = \{x \in E,\ x \in A \wedge x \in B\}$

La réunion des deux ensemble A et B est l'ensemble$A \cup B$ défini par :

$A \cup B = \{x \in E,\ x \in A \vee x \in B\}$

Fondamental

Si $A \subset B$ alors$A \cap B = A$ et $A \cup B = B$.

Si $A \subset B$ alors $B^c \subset A^c$.

$A^c \cap A = \emptyset$

$A^c \cup A = E$

2.1.4. Produit cartésien

Le produit cartésien des deux ensemble$A$ et B est l'ensemble des couple (a, b) ou $a \in A$ et $b \in B$ et on ecrit :

$A \times B = \{(a, b),\ a \in A, b \in B\}$.

2.2. Exercice : Exercice d'apprentissage

Soient E et F deux ensembles définis par :

$E = \{n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 3k + 1\}$

$F = \{n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z},\ n = 3k + 4\}$

Montrer que $E = F$

2.3. Exercice : Exercice d'apprentissage

Montrer que $(A \times B) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$.

2.4. Les relations

On appelle $relation$ d'un ensemble E vers un ensemble F toute proposition $R(x, y)$ tel que $x \in E$ et $y \in F$ et on écrit aussi xRy . On dit que x est en relation avec y si et seulement si $R(x, y)$ est vraie.

L'ensemble des couple (x, y) qui vérifient la relation R s'appelle le *graphe* de la relation R et on le note par G_r.

Exemple

Exemple : $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $F = \{2, 6, 7, 9, 10\}$

R est une relation définit par : $\forall x \in E,\ \forall y \in F\ \ xRy \Longleftrightarrow$ y est le double de x.

Donner le graphe de cette relation.

Réponse : $G_r = \{(1, 2), (3, 6)\}$

Complément

On appelle relation *binaire* toute relation d'un ensemble E vers lui même.

2.4.1. Les propriétés d'une relation

a) Réflexivité

Soit E un ensemble et R une relation binaire dans E. On dit que R est une relation *réflexive* si et seulement si $\forall x \in E : \; xRx.$

b) Symétrie

Soit E un ensemble et R une relation binaire dans E. On dit que R est une relation *symétrique* si et seulement si $\forall x \in E, \forall y \in E, xRy \Rightarrow yRx.$

c) Transitivité

Soit E un ensemble et R une relation binaire dans E. On dit que R est une relation *transitive* si et seulement si $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, xRy \text{ et } yRz \Rightarrow xRz.$

d) Antisymétrie

Soit E un ensemble et R une relation binaire dans E. On dit que R est une relation *antisymétrique* si et seulement si $\forall x \in E, \forall y \in E, xRy \text{ et } yRx \Rightarrow x = y.$

e) Relation d'équivalence et Relation d'ordre

Soit E un ensemble et R une relation binaire dans E.

On dit que R est une relation *d'équivalence* si et seulement si R est réflexive , symétrique et transitive.

On dit que R est une relation *d'ordre* si et seulement si R est réflexive , antisymétrique et transitive.

Remarque

La relation $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Complément : Classe d'équivalence

Soit E un ensemble et R une relation d'équivalence sur E. L a classe d'équivalence d'un élément $a \in E$ est l'ensemble définit par

$$Cl(a) = \{x \in E, \; xRa\}$$

Exemple

Soit R une relation définies sur $\mathbb{Z}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, \; xRy \Longleftrightarrow x - y \text{ multiple de } 2.$$

Montrer que R est une relation d'équivalence

donner la classe de $0, 1, 2, 3.$

Réponse :

R est réflexive car $\forall x \in \mathbb{Z}, \;$ on a $\; x - x = 0$ et donc $xRx.$

R est symétrique : en éffet soient $x, y \in \mathbb{Z}, \;$ tel que $\; xRy.$

$$xRy \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \; x - y = 2k$$

et donc $y - x = -2k = 2k'$ avec $k' = -k \in \mathbb{Z}$ c.a.d yRx.

R est transitive :

Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$, tels que xRy et yRz, donc il existe deux entiers relatifs k, k' tels que :

$x - y = 2k$ et $y - z = 2k'$ la somme des deux équations donne :

$x - z = 2(k + k') = 2k''$ avec $k'' = k + k' \in \mathbb{Z}$ donc xRz.

$cl(0) = \{x \in \mathbb{Z},\ xR0\}$

$cl(0) = \{x \in \mathbb{Z},\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x - 0 = 2k\}$

$cl(0) = \{x \in \mathbb{Z},\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = 2k\}$

De la meme manière on trouve

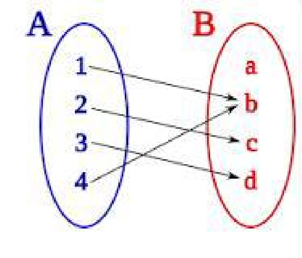
$cl(1) = \{x \in \mathbb{Z},\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = 2k + 1\}$

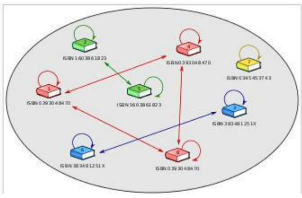
$cl(2) = \{x \in \mathbb{Z},\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = 2k + 2\}$

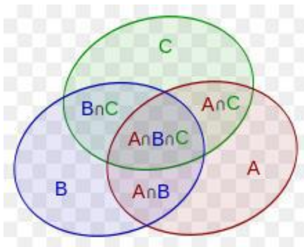
On remarque que $cl(0) = cl(2)$ et $cl(1) = cl(3)$

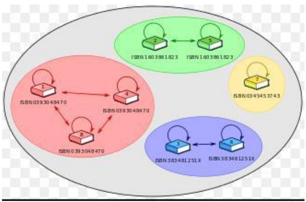
Donc la classe de tout nombre paire est la classe de 0, et la classe de tout nombre impaire est la classe de 1

galerie02









2.5. evaluation

Exercice [*solution* n°2 p.21]

quelle est la différence entre une relation d'ordre et une relation d’équivalence

Exercice [*solution* n°3 p.22]

Une relation d’équivalence peut elle être une relation d'ordre

Exercice [*solution* n°4 p.22]

Peut on calculer la classe d’équivalence d'un élément d'un ensemble muni d'une relation d'ordre

2.6. Fonctions et Applications

2.6.1. Généralités

Définition

On appelle *fonction* de E dans F toute relation R de E vers F qui associe à tout élément x de E *au plus* un élément y de F tel que xRy. La relation R est souvent notée par $f, g, h, \ldots$, et on écrit :

$f: \quad E \longrightarrow F$

$x \longmapsto y = f(x)$

y est l'image de x par la fonction f

x est l'antécédent de y par la fonction f

E l'ensemble de départ et F l'ensemble d'arrivé.

2.6.2. Application

Définition

Soit f une fonction. On appelle domaine de définition de f l'ensemble des $x \in E$ tel que $\exists y \in F:\ y = f(x)$.

On note $D_f = \{x \in E:\ \exists y \in F \text{ tel que } y = f(x)\}$.

$Exemple$:

$f: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto \sqrt{x-1}$

$D_f = [1 \ \ +\infty[$

vedeo

Définition

Une application de E dans F est une fonction où $D_f = F$

Définition : L'identité

L'identité c'est une application de E dans E qui associe à chaque x dans E l'élément x lui même et on écrit : $Id_E(x) = x$.

Fondamental : Composé de deux applications

Soient $f: \quad E \longrightarrow F$ et $g: \quad F \longrightarrow G$.

La composée des deux applications f et g respectivement est l'application notée $g \circ f$ est qui est définie comme suit :

$g \circ f: \quad E \longrightarrow G$

$x \longmapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)]$.

Attention

L'ordre de la composition est important. Généralement $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemple

Soient f et g deux applications définies comme suit :

$f: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto f(x) = 3x + 1.$

$g: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto g(x) = x^2 + 1.$

déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Réponse :

$g \circ f: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)] = (3x + 1)^2 + 1.$

$f \circ g: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto (f \circ g)(x) = f[g(x)] = 3(x^2 + 1) + 1.$

2.6.3. Injection - surjection - bijection

Définition : Injection

Soit f une application de E vers F. On dit que f est injective ou que f est une injection si et seulement si :

$\forall x_1, x_2 \in E: \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$

Exemple

$f: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto f(x) = 3x + 1$

Montrer que f est injective.

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 1 = 3x_2 + 1$

donc $x_1 = x_2$.

Alors f est injective.

Définition : Surjection

Soit f une application de E vers F. On dit que f est une application surjective ou que f est une surjection si et seulement si :

$\forall y \in F, \exists x \in E: y = f(x).$

Exemple

$f: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x \longmapsto f(x) = x^2.$

f est elle surjective ?

Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x) \Rightarrow$

$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ où $x = -\sqrt{y}$.

Si $y \in \mathbb{R}_-^*$, \, alors, y n'a pas d'antécédent.

Donc f n'est pas surjective

Définition : Bijection

Soit f une application de E vers$F$. On dit que f est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

Autrement dit :

$$f \text{ bijective } \Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x! \in E: \; y = f(x).$$

Fondamental : Application Réciproque

Toute application bijective f de$E$ dans F admet une application réciproque f^{-1} définie de F dans E. On note

$$f^{-1}: \quad F \longrightarrow E$$

$$y \longmapsto x = f^{-1}(y)$$

2.6.4. L'image directe et l'image indirecte

Soit$f$ une application de E vers F, $A \subset E$ et $B \subset F$.

L'image de l'ensemble A par l'application f est l'ensemble noté $f(A)$ défini par :

$$f(A) = \{y \in F : \; y = f(x) \text{et } \; x \in A\}$$

Si f est bijective, l'image réciproque de B est l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ défini par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : \; y = f(x) \text{et } \; y \in B\}$$

$$f^{-1}(B) = \left\{x \in E : \; x = f^{-1}(y) \text{et } \; y \in B\right\}$$

Exemple

Soit f une application de $\mathbb{R}^+$ dans$\mathbb{R}^+$ tel que $f(x) = x^2$.

déterminer $f([1 \;\; 4[)$ et $\; f^{-1}([0 \;\; 2[)$

$$f([1 \;\; 4[) = [1 \;\; 16[$$

$$f^{-1}([0 \;\; 2[) = \left[0 \;\; \sqrt{2}\right[$$

3. Évaluation générale

3.1. Évaluation , orientation et remédiation

[cf. SERIE N 1- chap1]

évaluation voir Serie N1

Cf. "vedeo3"

Remédiation voir la reférence*

Orientation voir la *vedeo03*

Solutions des exercices

> **Solution** n°1

Exercice p. 5

Exercice

La définition exacte d'un nombre rationnel est

- ◉ $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*$
- ○ $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z}^*$
- ○ $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$
- ○ $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x = \frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}^*$

C'est tous nombre de la forme $\frac{a}{b}$ ou a et un entier relatif et b un entier relatif non nul.

Exercice

Un nombre réel est toujours

- ○ rationnel
- ◉ rationnel ou irrationnel
- ○ irrationnel

l'ensemble $\mathbb{R}$ est constituer des nombres rationnels et irrationnels.

Exercice

Une fonction est une relation qui à chaque élément de l'ensemble de départ fait associer au plus un élément de l'ensemble d'arriver

- ○ vrai
- ◉ faux

Une fonction est une relation qui à chaque élément de l'ensemble de départ fait associer au moins un élément de l'ensemble d'arriver

> **Solution** n°2

Exercice p. 16

quelle est la différence entre une relation d'ordre et une relation d’équivalence

la deuxième condition

> **Solution** n°3

Exercice p. 16

Une relation d’équivalence peut elle être une relation d'ordre

Non

> **Solution** n°4

Exercice p. 16

Peut on calculer la classe d’équivalence d'un élément d'un ensemble muni d'une relation d'ordre

non

Références

Chapitre 1,2 http://exo7.emath.fr/cours/livre-algebre-1.pdf

Raisonnement
http://www.neoprofs.org/t58753p20-qui-a-un-exemple-de-raisonnement-par-l-absurde-court-et-amusant

Bibliographie

J. Rivaud, Algèbre : Classes préparatoires et Université Tome 1, Exercices avec solutions, Vuibert, 1978.

M. Balabne, M. Duflo, M. Frish, D. Guegan, Géométrie – 2e année du 1er cycle classes préparatoires, Vuibert Université, 1982.

Algèbre et Analyse, cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, Stéphan Blac, 2003