CHAPITRE 2- Traction et Compression simples

2.1- Introduction

L'ingénieur utilise la *résistance des matériaux* avant tout pour déterminer les dimensions des éléments de construction et vérifier leur résistance et leur déformation. L'un des éléments structurels le plus fréquent est la poutre, c'est-à-dire un objet de grande longueur par rapport à sa section, chargée dans son plan moyen de symétrie (**Fig.2.1**).

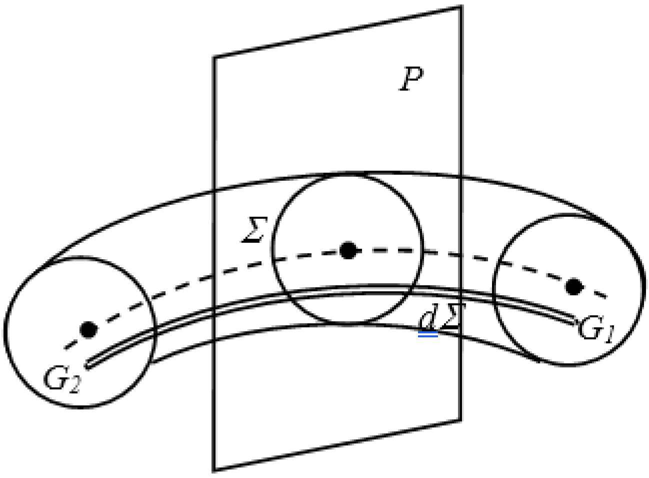


Figure 2.1 – Elément de poutre

2.2 Traction et compression simples

Soit une barre rectiligne sollicitée par deux forces égales et directement opposées agissant suivant sa fibre moyenne est soumise à un effort normal. Cet effort est dit:

• un effort de traction simple si les forces tendent à allonger la barre (**Fig.2.2**),

• un effort de compression simple si les forces tendent à raccourcir la barre.

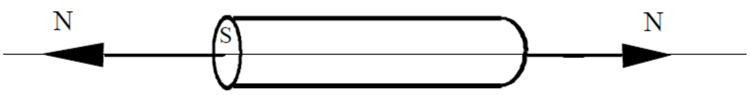


Figure 2.2 – Force de traction simple

2.3 Contrainte normale

On considère une barre rectiligne, de section *S* liée à un massif fixe à son extrémité supérieure A l'autre extrémité, elle est soumise à l'action d'une force ***N*** suivant son axe.

σ *est appelé* ***contrainte normale***. Elle représente l'intensité de l'effort normal par unité de surface. σ se mesure en (N/m²) ou Pascal (Pa).

Chaque élément de surface supporte un effort de traction parallèle à la ligne moyenne.

Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite

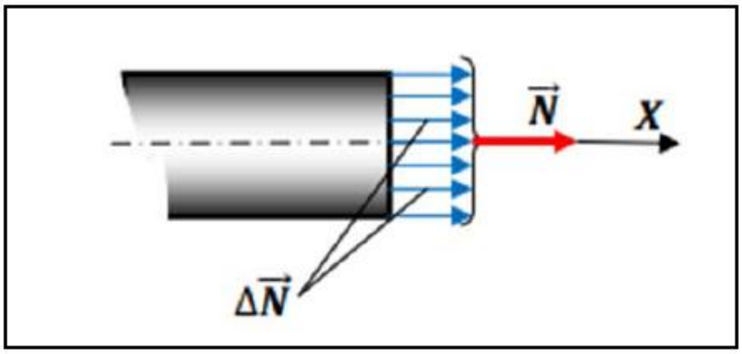


Figure 2.3- Répartition uniforme des contraintes

D'où :

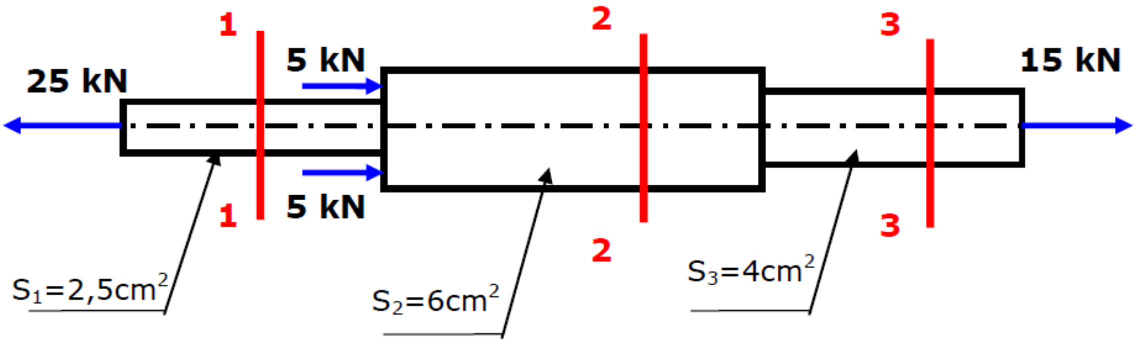
$$\vec{C}(M, \quad \vec{n}) = \sigma\vec{x} \quad \text{et comme} \quad N = \iint_s \sigma.dS = \sigma.S \text{ , on aura : } \sigma = \frac{N}{S}$$

$N[N]$; $S[mm^2]$; $\sigma[MPa]$

Cette relation peut éventuellement être algébrique. On obtiendra alors :
- une contrainte $\sigma < 0$ en compression.
- une contrainte $\sigma > 0$ en traction.

Exemple 1.1

Soit la barre schématisée par la figure ci-dessous. Calculer les contraintes au niveau des sections ***1-1***, ***2-2*** *et* ***3-3***.

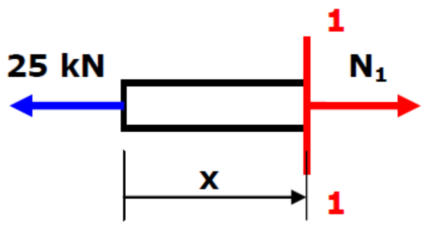


Solution de l'exemple 1.1

Section 1-1

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \quad N_1 = 25kN$$

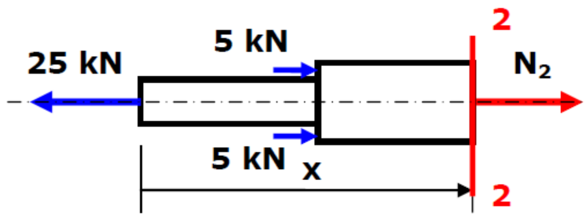
$$\sigma_{1-1} = \frac{N_1}{S_1} = \frac{25}{2{,}5} = 10kN/cm^2 = 100MPa$$



Section 2-2

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \quad N_2 = 15kN$$

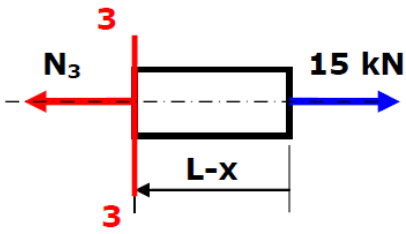
$$\sigma_{2-2} = \frac{N_2}{S_2} = \frac{15}{6} = 2{,}5kN/cm^2 = 25MPa$$



Section 3-3

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \quad N_3 = 15kN$$

$$\sigma_{3-3} = \frac{N_3}{S_3} = \frac{15}{4} = 3{,}75kN/cm^2 = 37{,}5MPa$$



2.4 Diagramme de l'effort normale (DEN)

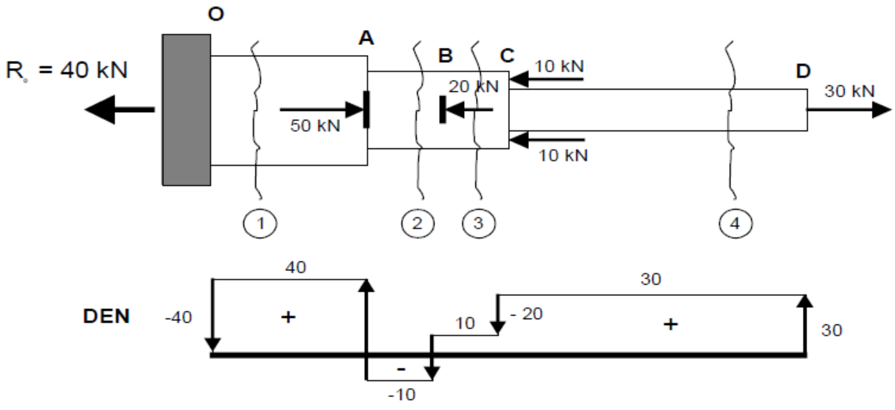
 Le digramme de l'effort normal (DEN) donne la valeur de l'effort normal dans toutes les sections perpendiculaires à la membrure à l'étude.

 L'effort normal dans une section est la résultante des charges axiales s'exerçant sur la section.

 Le DEN est obtenu par la méthode des sections en effectuant une coupe suivant l'entrée de chaque force concentrée et, au début et à la fin ainsi qu'au minimum et au maximum (s'il y a lieu) de chaque charge répartie.

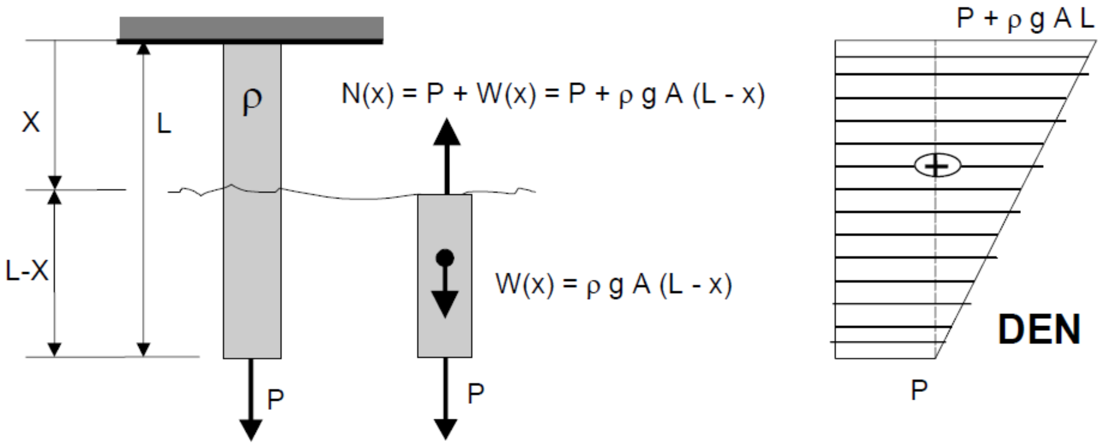
- ***Exemple avec des forces concentrées***

La figure ci-dessous schématise le DEF tout au long d'une barre dans le cas où les efforts axiaux sont concentrés.



- ***Exemple avec une charge répartie (poids de l'élément)***

La figure ci-dessous schématise le DEF tout au long d'une barre soumise à son poids propre.



2.5 Courbe Contrainte – Déformation

La courbe contrainte déformation est une courbe caractérisant le matériau. Elle est obtenue empiriquement d'une expérience de traction effectuée sur une barre de section constante. Lors de cette expérience l'effort normal est augmenté progressivement provoquant l'allongement de la barre. A chaque incrément d'effort, la contrainte normale et la déformation de la barre sont portées sur une courbe. Cette opération est effectuée régulièrement jusqu'à la rupture de la barre. La courbe ainsi obtenue est la courbe *contrainte - déformation* du matériau (**Fig.2.3**).

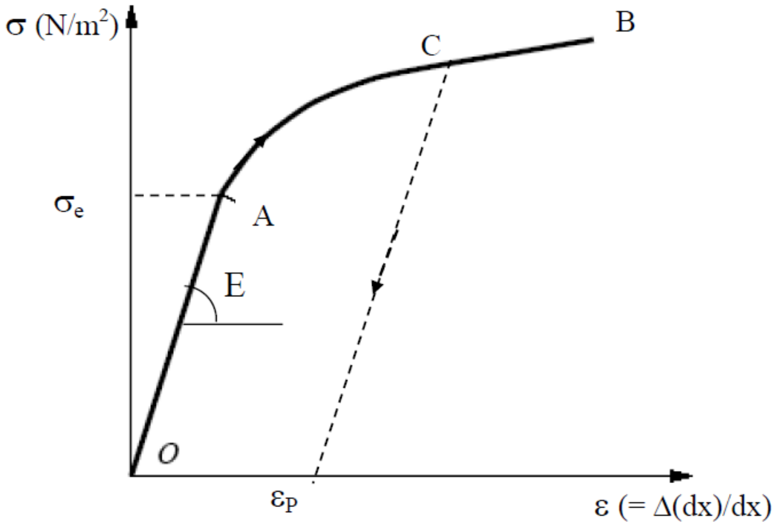


Figure 2.3 – Courbe contrainte-déformation

La partie (OA) est la partie élastique. La limite élastique n'est pas atteinte. La barre reprend sa forme initiale si l'expérience est interrompue dans cette zone. Dans ce cas l'élasticité est linéaire ((OA) est une droite). La pente E de la droite (OA) est appelée module d'élasticité linéaire ou module de Young (tableau 2.1). Il représente le rapport entre la contrainte et la déformation ε dans la zone élastique. La relation entre la contrainte et la déformation dans la zone élastique est donnée par la *loi de Hooke*:

$$\sigma = E\varepsilon$$

La partie (AB) est la partie plastique. La limite élastique est dépassée. Si l'expérience est interrompue (point C), la barre ne reprend pas sa forme initiale. Le chemin de décharge est, de manière simplifiée parallèle à la droite (OA). Lorsque l'effort appliqué s'annule, il persiste une déformation résiduelle ε_p qui ne disparaît plus.

Tableau – Module de Young de quelques matériaux

Matériau	Module de Young (Mpa)
Acier	210000
Bronze	124000
Fer	196000
Or	78000
Plomb	18000
Brique	14000
Calcaire	20000 à 70000

2.6 Condition de résistance

Les contraintes développées dans les poutres doivent rester dans le domaine élastique.
En général, on adopte un coefficient de sécurité s.

La condition de résistance pour une contrainte normale de traction est :

$$\sigma = \frac{N}{S} \leq R_{pe} = \frac{\sigma_e}{s}$$

On pose R_{pe} contrainte pratique à la traction en [MPa]

La condition de résistance pour une contrainte normale de compression est :

$$\sigma = \frac{N}{S} \leq R_{pc} = \frac{\sigma_e}{s}$$

On pose R_{pc} : contrainte pratique à la compression en [MPa]

- **Limite élastique**

Pour tous les matériaux homogènes et isotropes la limite élastique en traction σ_{et} est égale à la limite élastique en compression σ_{ec}. On les désigne alors simplement σ_e (limite élastique). C'est le cas des aciers.

- **Coefficient de sécurité**

Le coefficient de sécurité vaut *1,5* à *2* pour un plancher, *2* à *3* pour une charpente, *10* à *12* pour ascenseurs et câbles.

2.7 Condition de rigidité

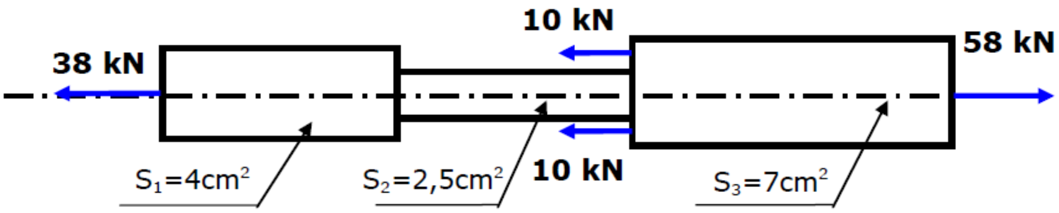
Pour des raisons fonctionnelles (problèmes d'alignement d'appui, cahier des charges…), il est parfois important de limiter l'allongement. Il doit rester inférieur à une valeur limite $\Delta l \langle \Delta l_{\text{lim}}$.

D'après la loi de Hooke :

$$\begin{cases} \sigma = E.\varepsilon = E.\dfrac{\Delta l}{l} \\ \sigma = \dfrac{N}{S} \end{cases} \Rightarrow \Delta l = \frac{N.l}{E.S}$$

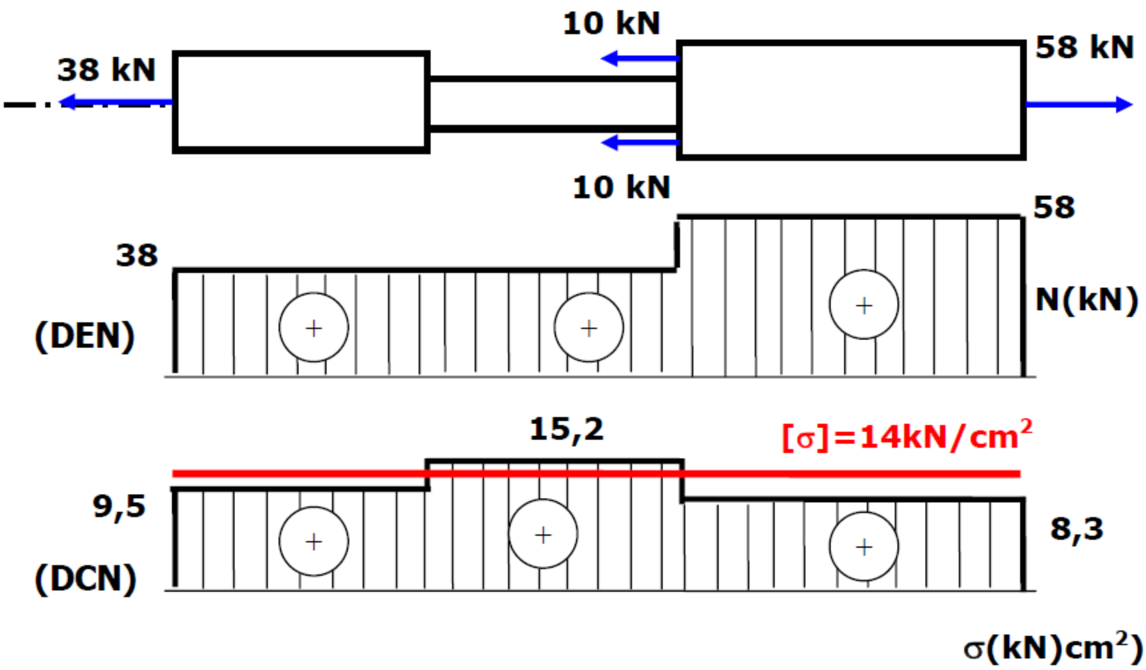
- ***Exemple 2.2***

Vérifier la résistance de la barre métallique schématisée par la figure ci-dessous, sachant que [σ]=14 kN/cm².



- ***Solution de l'exemple 2.2***

Nous traçons le Diagramme de l''Effort Normal (DEN) et nous déduisons le Diagramme de la Contrainte Normale (DCN) puis nous reportons dessus la valeur de la contrainte admissible du matériau:



Nous remarquons que la contrainte maximale est égale à 15,2 kN/cm² et elle est supérieure à la contrainte admissible, d'où la barre ne résiste pas à la traction.

2.8 Loi de déformation élastique

On considère une barre de longueur initiale *L* soumise à un effort normal *N*. Une portion de longueur *dx* de la barre subit une variation de longueur *du*=Δ(dx) (Fig. 2.4).

On appelle **déformation longitudinale** dans la section d'abscisse x la quantité adimensionnelle:

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx} \tag{5}$$

D'où

$$\Delta(dx) = \varepsilon dx \tag{6}$$

D'autre part,

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{ES} \tag{7}$$

Ainsi $\Delta(dx)$ vaut

$$\Delta(dx) = \frac{N}{ES} dx \tag{8}$$

et la déformation totale de la barre est donc

$$\Delta L = \int_0^L \Delta(dx) = \int_0^L \frac{N}{ES} dx \tag{9}$$

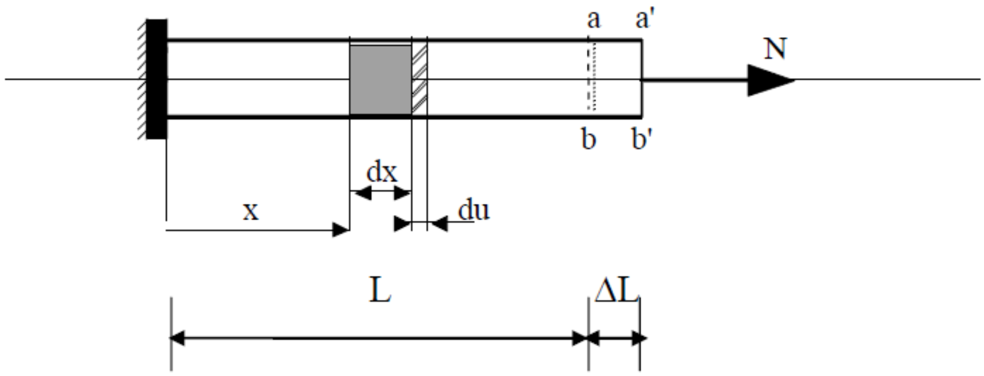


Fig. 2.4- Déformation linéaire.

- ***Cas particulier***

Pour une barre homogène de section constante, si N est *constant* (Fig. 2.5), l'allongement absolu s'écrit:

$$\Delta L = \frac{NL}{ES} \tag{10}$$

Revenons à l'équation $\varepsilon = \dfrac{N}{ES}$, on a la relation

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \qquad (10)$$

qui exprime la déformation *(ou l'allongement)* relative. ΔL est la déformation absolue.

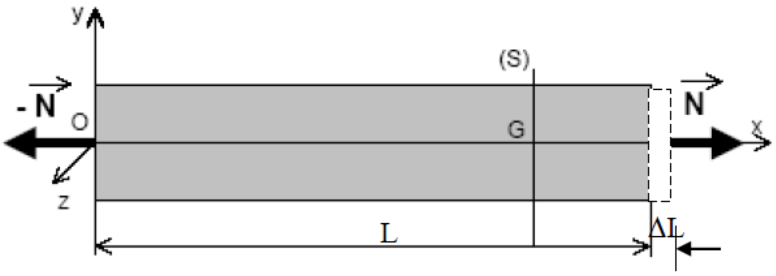
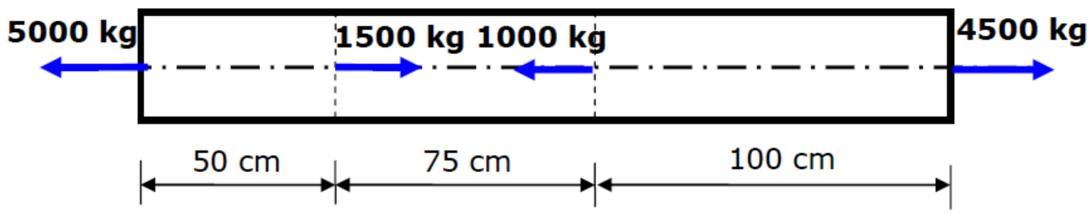


Fig. 2.5- Barre homogène soumise à un effort de traction.

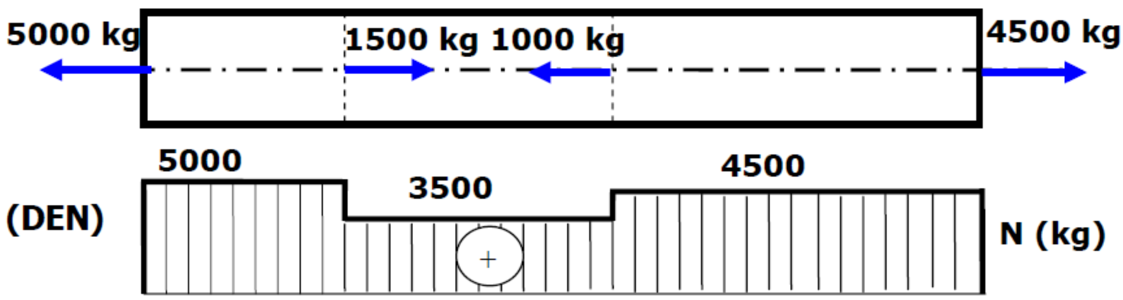
- ***Exemple 2.3***

Déterminer l'allongement total de la barre métallique, sollicitée comme le montre la figure ci-dessous, sachant que le module de Young E = 2,110^6 *kg/cm*^{2}*. La section de la barre est constante et vaut 5 cm*^{2}*.*



- ***Solution de l'exemple 2.3***

Le DEN est montré sur la figure ci-dessous:



$$\Delta L = \int_0^L \frac{N}{ES}dx = \int_0^{L_1} \frac{N_1}{ES_1}dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{N_2}{ES_2}dx + \int_{L_1+L_2}^{L} \frac{N_3}{ES_3}dx$$
$$= \frac{N_1L_1}{ES_1} + \frac{N_2L_2}{ES_2} + \frac{N_3L_3}{ES_3}$$
$$= \frac{1}{E}\sum_{i=1}^{3} \frac{N_iL_i}{S_i}$$

$$\Delta L = \frac{1}{2,1.10^6\, x5}(5000x50 + 3500x75 + 4500x100)$$

Ainsi, l'allongement total de la barre est

$$\Delta L = 0,092cm$$

VII. Application :

VII.1. Enoncé :

Une barre d'acier de 10 mm de diamètre reçoit une force de traction de 12560 N.

Quelle sera l'allongement de la barre de 5 mètres si la E N mm = 210000 N/mm^2. Quelle sera alors la contrainte dans cette barre ?

VII.I. Corrigé :

Solution :

Recherche de la section de la barre :

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 10^2}{4} = 78.54\ mm^2$$

L'allongement de la barre :

$$\Delta l = \frac{N\ l_0}{E\ A} = \frac{12\,560 \times 5000}{210\,000 \times 78.54} = 3.8\ mm$$

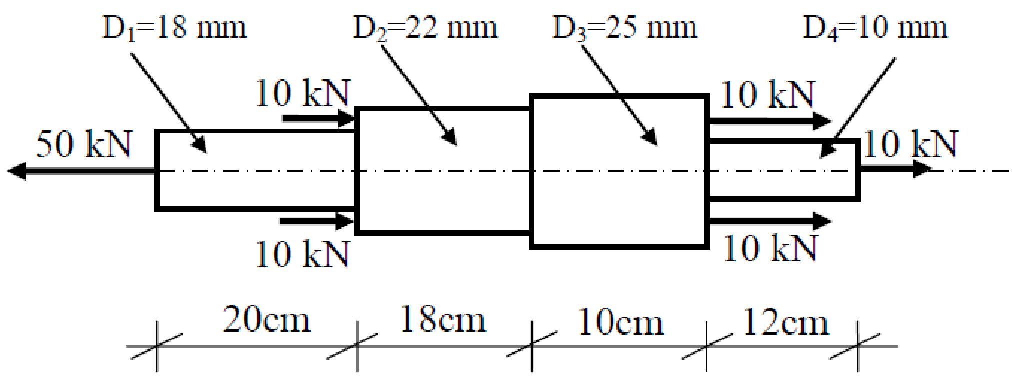
La contrainte sera égale à :

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{12\,560}{78.54} = 159.9\ N/mm^2 \approx 160\ N/mm^2$$

Exercices

Exercice N°1

Soit la barre schématisée par la figure ci-dessous:



1- Tracer le diagramme de l'effort normal tout au long de la barre.

2- Tracer le diagramme de la contrainte normale tout au long de la barre.

3- Vérifier la résistante de la barre si la contrainte admissible du matériau est supposée de 14 kN/cm^2.

4- Calculer la déformation (allongement ou raccourcissement) de la barre.

5- En déduire le pourcentage de l'allongement et le pourcentage du raccourcissement dans la barre.

Exercice N°2

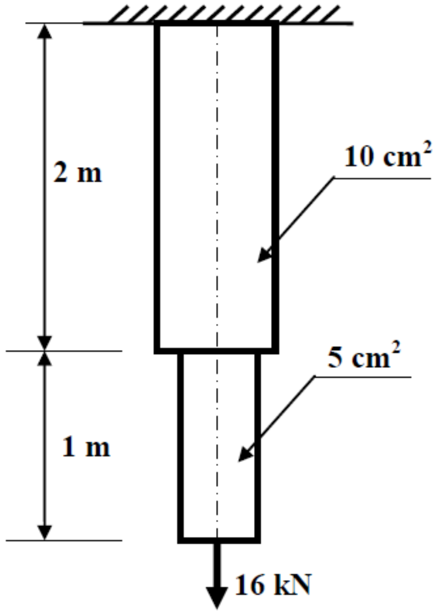
Soit la barre en acier, schématisé par la figure ci-dessous, encastrée à son extrémité supérieure et tendue par une force de 16 kN à son extrémité inférieure.

En tenant compte du poids spécifique du matériau (γ=7,8 10^4 N/m^3),

1- Tracer le diagramme de l'**effort normal** tout au long de la barre.

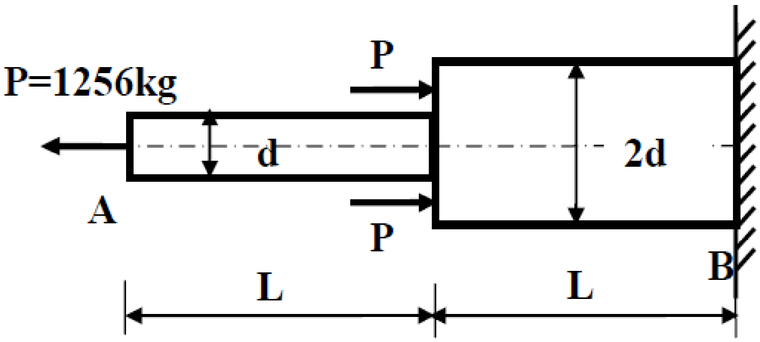
2- Tracer le diagramme de la **contrainte normale** tout au long de la barre.

3- Vérifier la **résistante** de la barre, à la section dangereuse, si la contrainte admissible du matériau est supposée de **15 kN/cm^2**.



Exercice N°3

Deux barres cylindriques en acier, sont reliées ensemble, comme le montre la figure ci-dessous. Le système entier est encastré à son extrémité inférieure et sollicité par l'effort P.



Déterminer la valeur du diamètre d, si la contrainte admissible du matériau constituant chacune des deux barres est égale à 16kN/cm2.

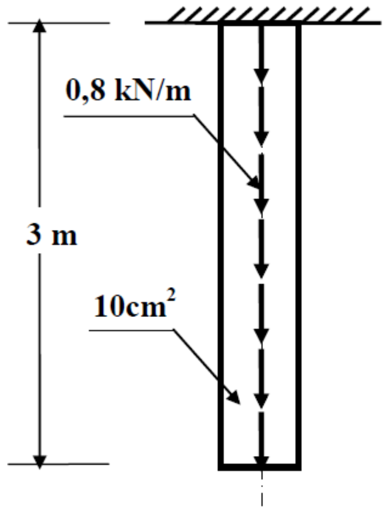
Exercice N°4

Soit la barre en acier, encastrée à son extrémité supérieure et tendue par une force de 0,8kN/m linéairement répartie comme le montre la figure ci-dessous.

1- Que pourrait représenter la force de 0,8 kN/m? Schématisé cette force dans un modèle global.

2- Vérifier la résistante de la barre, à la section dangereuse, si la contrainte admissible du matériau est égale à 150 MPa.

3- Calculer l'allongement total de la barre (en mm) si le module de Young vaut 21000daN/mm^2.


0,8 kN/m
3 m
10cm²