I Le corps des nombres complexes

I.1 Définition de C

Définition

On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des deux lois suivantes :

$$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ (x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx') \end{cases}$$

Proposition

Muni de ces deux lois, $\mathbb{R}^2$ possède une structure de corps. Plus précisément :

- Le neutre pour la loi $+$ est $(0, 0)$.
- L'opposé de (x, y) est $(-x, -y)$.
- Le neutre pour le produit est $(1, 0)$.
- Pour tout $z = (x, y)$ non nul, l'inverse de z est : $\dfrac{1}{z} = (\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{-y}{x^2 + y^2})$.

Définition

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ avec les deux lois précédentes.
Ses éléments $z = (x, y)$ sont appelés *nombres complexes*.

Proposition

L'ensemble $\mathbb{K} = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
L'application $f : x \to (x, 0)$ est un isomorphisme de corps de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{K}$.

Conséquence

De cette manière $(\mathbb{R}, +, \times)$ apparait comme un sous-corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
Cet isomorphisme permet d'identifier le complexe $(x, 0)$ avec le réel x.

I.2 Notation cartésienne

Dans le corps $(\mathbb{C}, +, \times)$, on note $i = (0, 1)$.
Pour tout $z = (x, y)$ de $\mathbb{C}$, on constate que $z = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$.
Avec l'identification de $\mathbb{R}$ avec un sous-corps de $\mathbb{C}$, on peut écrire : $z = x + iy$.
On a ainsi obtenu la notation *cartésienne* (ou *algébrique*) des nombres complexes.

Définition

Pour tout z de $\mathbb{C}$, il existe un couple unique (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$.
Le réel x est appelé *partie réelle* de z et est noté $\mathrm{Re}\,(z)$.
Le réel y est appelé *partie imaginaire* de z et est noté $\mathrm{Im}\,(z)$.
Un nombre complexe z est dit *réel* si $\mathrm{Im}\,(z) = 0$.
z est dit *imaginaire pur* si $\mathrm{Re}\,(z) = 0$, c'est-à-dire si $z = iy$, avec y réel.

Remarques

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes, avec $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$.

Les lois de $\mathbb{C}$ s'écrivent maintenant : $\begin{cases} z + z' = (x + x') + i(y + y') \\ zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx') \end{cases}$

$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ (on *identifie* les parties réelles et les parties imaginaires.)

En particulier : $z = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ (attention à vérifier que x et y sont réels !).

Puissances du nombre i

On constate que $i^2 = -1$. Donc $\frac{1}{i} = -i$.

En fait, $z^2 = -1 \Leftrightarrow z \in \{i, -i\}$.

Plus généralement $i^3 = -i$, et $i^4 = 1$.

Le sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ engendré par i est cyclique d'ordre 4 : $(i) = \{1, i, -1, -i\}$.

Remarque

Si ω est un complexe non réel, alors on peut encore effectuer l'identification suivante :

$\forall (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4 : x + \omega y = x' + \omega y' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$.

I.3 Conjugaison

Définition

Soit $z = x + iy$ (x et y réels) un nombre complexe quelconque.

Le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$ est appelé le *conjugué* de z.

On nomme *conjugaison* l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par $z \rightarrow \overline{z}$.

Proposition

La conjugaison est un automorphisme involutif du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Cela signifie que :

- $\overline{1} = 1$; $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{\overline{z}} = z$.
- $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ et $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

Propriétés

- Pour tous complexes $z_1, \ldots, z_n$, $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$ et $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$
- Pour tout z complexe : $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}\,(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$.
- z est réel $\Leftrightarrow \overline{z} = z$.
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

I.4 Module

Définition

Soit $z = x + iy$ (x et y réels) un nombre complexe quelconque.
On appelle *module* de z la quantité, notée $|z|$, égale à $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarques

On constate que $z\overline{z} = |z|^2$ (utile pour se "débarrasser" du module).

En particulier, si z est non nul, l'inverse de z est $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Si z est réel, le module de z est égal à sa valeur absolue.

Les notations $|\ |$ (valeur absolue ou module) sont donc compatibles.

Propriétés

L'application "module" vérifie les propriétés suivantes, pour tous (z, z') de $\mathbb{C}^2$:

- $|z| \geq 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|zz'| = |z||z'|$.
  Si z est non nul, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. Il y a égalité $\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z' = \lambda z$ ou $z = \lambda z'$.
  $\big||z| - |z'|\big| \leq |z \pm z'|$. Si $|z| \leq k < 1$, alors $1 - k \leq |1 + z| \leq 1 + k$.
- $\forall\, (u, v) \in \mathbb{C}^2, |u + v|^2 = |u|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\mathrm{u}\overline{\mathrm{v}}) + |\mathrm{v}|^2$.
- $\forall\, z \in \mathbb{C}, \max(|\mathrm{Re}\,(\mathrm{z})|, |\mathrm{Im}\,(\mathrm{z})|) \leq |\mathrm{z}| \leq |\mathrm{Re}\,(\mathrm{z})| + |\mathrm{Im}\,(\mathrm{z})|$.

Généralisation

Pour tous complexes $z_1, \ldots, z_n$: $\left|\prod\limits_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod\limits_{k=1}^{n} |z_k|$ et $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|$.

En particulier $\forall\, n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$.

On a $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k| \Leftrightarrow$ les z_k sont produits de l'un d'entre eux par des réels positifs.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{U}$ des complexes de module 1 est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Pour tout z de $\mathcal{U}$, $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$.

Proposition *(Distance dans $\mathbb{C}$)*

Soit d l'application $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $\forall\, (z, z') \in \mathbb{C}^2, d(z, z') = |z - z'|$.

d est une *distance* sur $\mathbb{C}$, ce qui signifie qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

Pour tous nombres complexes u, v et w :

- $d(u, v) \geq 0$; $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$; $d(u, v) = d(v, u)$.
- $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (inégalité triangulaire.)

I.5 Fonctions à valeurs complexes

Soit X un ensemble quelconque non vide.

$\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des applications définies sur X et à valeurs complexes.

Le plus souvent X désignera un intervalle de $\mathbb{R}$, ou l'ensemble $\mathbb{N}$ (dans ce dernier cas, on obtient l'ensemble des suites à valeurs complexes).

On sait que $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ est un anneau commutatif pour les lois déduites de $\mathbb{C}$, et définies par :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C}), \forall x \in X : \begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (fg)(x) = f(x)g(x) \end{cases}$$

Le neutre de $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ pour la loi $+$ (resp. la loi $\times$) est l'application constante 0 (resp. 1).

Si f appartient à $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$, on définit les éléments $\mathrm{Re}\,(\mathrm{f})$, $\mathrm{Im}\,(f)$, $\overline{f}$ et $|\,f\,|$ de $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$:

$$\forall x \in X : \begin{cases} \mathrm{Re}\,(\mathrm{f})(\mathrm{x}) = \mathrm{Re}\,(\mathrm{f}(\mathrm{x})) & \mathrm{Im}\,(f)(x) = \mathrm{Im}\,(f(x)) \\ \overline{f}(x) = \overline{f(x)} & |\,f\,|(x) = |\,f(x)\,| \end{cases}$$

On a, pour les opérations "partie réelle", "partie imaginaire", "conjugaison" et "module", des propriétés dans $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ analogues à celles qui ont été rencontrées dans $\mathbb{C}$.

II Argument, exponentielle complexe

II.1 Notation exp(i theta)

Définition

Pour tout réel θ, on pose $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Théorème

L'application $\theta \to \mathrm{e}^{i\theta}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathcal{U}, \times)$ des nombres complexes de module 1, de noyau $2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, |\,\mathrm{e}^{i\theta}\,| = 1$.
- $\forall (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{i\varphi} = \mathrm{e}^{i(\theta+\varphi)}$.
- $\forall z \in \mathcal{U}$ (càd $|\,z\,| = 1$), $\exists \theta \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{i\theta} = z$.
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi \Leftrightarrow \theta \equiv 0\ (2\pi)$.

Propriétés
- L'application $\theta \to \mathrm{e}^{i\theta}$ est 2π-périodique : $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\varphi} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta - \varphi = 2k\pi \Leftrightarrow \theta \equiv \varphi\ (2\pi)$.
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \overline{\mathrm{e}^{i\theta}}$.
- Valeurs particulières :
  $\mathrm{e}^{i\pi/2} = i, \quad \mathrm{e}^{i\pi} = -1, \quad \mathrm{e}^{i3\pi/2} = -i, \quad \mathrm{e}^{i2\pi/3} = j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

II.2 Formules de Moivre et d'Euler

Proposition *(Formule de Moivre)*

Pour tout réel θ, et pour tout entier n : $(\mathrm{e}^{i\theta})^n = \mathrm{e}^{in\theta}$.
Autrement dit : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Proposition *(Formules d'Euler)*

Pour tout réel θ : $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$, et $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$.

Utilisation

- "Moivre" permet, en développant $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ et en identifiant les parties réelles et imaginaires, d'exprimer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de puissances de $\cos\theta$ et/ou $\sin\theta$.
- Les formules d'Euler permettent, par utilisation de la formule du binôme et regroupement des termes équidistants des extrémités, de *linéariser* $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$, pour $n \geq 2$, c'est-à-dire de les exprimer en fonction de quantités du type $\cos k\theta$ et/ou $\sin k\theta$.

II.3 Forme trigonométrique

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe une unique classe de réels θ définie modulo 2π, telle que $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$.

Cette classe de réels modulo 2π est appelée l'*argument* de z.

Chacun des réels θ de cette classe est appelée une *détermination* de l'argument de z (ou, par abus de langage, *un* argument de z), et on note : $\arg z = \theta\ (2\pi)$.

Remarque

L'argument d'un nombre complexe non nul z possède une unique détermination dans tout intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi[$, et en particulier dans les intervalles $[0, 2\pi[$ et $[-\pi, \pi[$.

Proposition

Tout nombre complexe non nul s'écrit de manière unique : $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

ρ est le module de z et θ est une détermination de l'argument de z.

On dit alors que $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$ est écrit sous forme *trigonométrique*.

Remarques

– $0 = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho = 0$ et θ réel quelconque. Parler de l'argument de 0 n'a donc aucun sens.

– Soit $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$ ($\rho > 0$). Alors : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ et $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\rho}, \quad \sin\theta = \dfrac{y}{\rho} \end{cases}$

Si $x \neq 0$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ (ce qui détermine θ modulo π.)

Si $x \neq -1$, $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{y}{x+1}$ (ce qui détermine θ modulo 2π.)

– Si $z \neq 0$, mais si on n'est pas certain du signe du réel ρ :

$z = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \Big(\rho = |z| \text{ et } \arg z = \theta\ (2\pi)\Big)$ ou $\Big(\rho = -|z| \text{ et } \arg z = \theta + \pi\ (2\pi)\Big)$

Argument et opérations dans $\mathbb{C}$

Soient u et v, non nuls : $u = \rho e^{i\theta}$ et $v = re^{i\varphi}$ ($\rho > 0, r > 0$).

$uv = \rho r e^{i(\theta+\varphi)}$. En particulier : $\arg uv = \arg u + \arg v\ (2\pi)$.

$\overline{u} = \rho e^{-i\theta}$. En particulier : $\arg\overline{u} = -\arg u\ (2\pi)$.

$\dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{\rho}e^{-i\theta}$. En particulier : $\arg\dfrac{1}{u} = -\arg u\ (2\pi)$.

$\dfrac{u}{v} = \dfrac{\rho}{r}e^{i(\theta-\varphi)}$. En particulier : $\arg\dfrac{u}{v} = \arg u - \arg v\ (2\pi)$.

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $u^n = \rho^n e^{in\theta}$. En particulier : $\arg u^n = n\arg u\ (2\pi)$.

$|u+v| = |u| + |v| \Leftrightarrow \arg u = \arg v\ (2\pi)$.

Argument et cas particuliers

Soit u un nombre complexe non nul.

$u \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow \arg u = 0\ (2\pi)$; $\quad u \in \mathbb{R}^{-*} \Leftrightarrow \arg u = \pi(2\pi)$.

u est réel $\Leftrightarrow \arg u = 0\ (\pi)$; $\quad u$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg u = \pi/2\ (\pi)$.

$\forall\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, $\arg\lambda u = \arg u\ (2\pi)$; $\quad \forall\lambda \in \mathbb{R}^{-*}$, $\arg\lambda u = \arg u + \pi\ (2\pi)$.

II.4 Fonction exponentielle complexe

Définition

Soit $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) un nombre complexe.

On pose $e^z = e^x e^{iy}$, encore noté $\exp z$.

On définit ainsi une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, appelée *exponentielle complexe*.

Remarques

– La restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction $z \to \exp z$ est l'exponentielle réelle déjà connue.
Sa restriction aux imaginaires purs est : $z = i\theta \to e^{i\theta}$ définie précédemment.

– Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) :

$\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$. Ainsi $\begin{cases} |\exp z| = \exp x \\ \arg\exp z = y\ (2\pi) \end{cases}$

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z' :

- $\exp(z+z') = \exp z \, \exp z'$.
- $\exp z = 1 \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2ik\pi$ (en particulier, $\exp 0 = 1$).
- $\exp z \in \mathbb{C}^*$ et $\dfrac{1}{\exp z} = \exp(\text{-}z)$.
- $\overline{\exp z} = \exp \overline{z}$.
- $\exp z = \exp z' \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = z' + 2ik\pi \Leftrightarrow z \equiv z' \; (2i\pi)$.
  L'application exponentielle est donc périodique de période $2i\pi$.

Résolution de l'équation $\exp z = a$

Soit $a = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe non nul ($\rho > 0$ est le module de a).
Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) :

$$\exp z = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln \rho \\ y \equiv \theta \; (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, z = ln(\rho) + i(\theta + 2k\pi).$$

L'équation $\exp z = a$ possède donc une infinité de solutions.
Toutes se déduisent de l'une d'entre elles par ajout d'un multiple entier de $2i\pi$.

Remarques

- D'apès les résultats précédents, l'application exponentielle est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ dont le noyau est $2i\pi\mathbb{Z}$.
- L'équation $\exp z = a$ (a non nul, z cherché sous la forme $x + iy$) possède une solution unique si on se limite à $y \in [\alpha, \alpha + 2\pi[$ (par exemple $y \in [0, 2\pi[$, ou $y \in [-\pi, \pi[$).

III Représentation plane

III.1 Le plan complexe

Définition

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé direct $(0, e_1, e_2)$.

L'application qui à $z = x + iy$ (x, y réels) associe le point M de coordonnées (x, y) est une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathcal{P}$.

On dit que M est le *point image* de z, ou encore que z est l'*affixe* de M.

On note $M(z)$ pour désigner simultanément M et son affixe z.

Le plan $\mathcal{P}$, muni de cette correspondance, est appelé le *plan complexe*.

Le vecteur $OM = xe_1 + ye_2$ est appelé *vecteur image* du nombre complexe $z = x + iy$ (et on dit que z est l'affixe de ce vecteur).

Remarques

- $|\, z \,|$ est la distance $d(O, M)$ (ou la norme du vecteur OM).
  Un argument de z est une mesure de l'angle (Ox, OM).
- L'axe Ox est l'ensemble des points images des nombres réels.
  L'axe Oy est l'ensemble des points images des imaginaires purs.
- Si on se donne deux points $A(a)$ et $M(z)$, le vecteur image de $z - a$ est AM.
  Le module $|\, z - a \,|$ représente la distance $d(A, M)$.
- Le point N image de $a + z$ est le quatrième sommet du parallélogramme $OANM$ bâti sur les points O, A, M.

III.2 Propriétés géométriques liées au module

- M appartient au cercle de centre A et de rayon $r \geq 0 \Leftrightarrow d(A, M) = r \Leftrightarrow |z - a| = r$.
  M appartient au disque fermé de centre A et de rayon $r \geq 0 \Leftrightarrow |z - a| \leq r$.
  M appartient au disque ouvert de centre A et de rayon $r > 0 \Leftrightarrow |z - a| < r$.
  M est à l'extérieur du disque fermé de centre A et de rayon $r \geq 0 \Leftrightarrow |z - a| > r$.
- Le cercle unité (centre en O, rayon 1) est formé des points images des complexes de module 1 (des éléments de $\mathcal{U}$).
  Le disque unité ouvert est l'ensemble images des z de $\mathbb{C}$ tels que $|z| < 1$.
  Le disque unité fermé est l'ensemble des points images des z de $\mathbb{C}$ tels que $|z| \leq 1$.
- Etant donnés $A(a)$, $B(b)$, et $M(z)$:
  M appartient à la médiatrice Δ du segment AB
  $\Leftrightarrow d(A, M) = d(B, M) \Leftrightarrow |z - a| = |z - b|$.
  L'inégalité $|z - a| < |z - b|$ définit le demi-plan ouvert délimité par Δ et contenant A.

III.3 Propriétés géométriques liées à la conjugaison

Soit M un point d'affixe z.

$N(\overline{z})$ est le symétrique de M par rapport à l'axe Ox.
$P(-z)$ est le symétrique de M par rapport à l'origine.
$Q(-\overline{z})$ est le symétrique de M par rapport à l'axe Oy.

Soient A et B deux points d'affixes respectifs a et b.

Le produit scalaire des vecteurs OA et OB est $Re(\overline{a}b)$.

III.4 Propriétés géométriques liées à l'argument

- Soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts de l'origine :
  O, A, B sont alignés $\Leftrightarrow \arg(a) = \arg(b)\ (\pi)$.
  A et B sont alignés avec O et du même coté de O
  $\Leftrightarrow |a| + |b| = |a+b| \Leftrightarrow \arg(a) = \arg(b)\ (2\pi)$.
- Soient a et z deux nombres complexes non nuls.
  On pose $a = \rho e^{i\theta}$, avec $(\rho > 0)$, et $b = e^{i\theta}$.
  On définit les points $M(z)$, $N(bz)$, $P(\rho z)$, $Q(az)$.
  On passe de $M(z)$ à $P(\rho z)$ par l'homothétie h de centre O de rapport ρ.
  On passe de $M(z)$ à $N(e^{i\theta} z)$ par la rotation r de centre O et d'angle θ.
  On passe de $M(z)$ à $Q(az)$ par la composée $f = h \circ r = r \circ h$.
  f est la *similitude directe* de centre 0, de rapport ρ, d'angle θ.
  En particulier, $R(iz)$ se déduit de $M(z)$ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

III.5 Transformations du plan complexe

Définition

Soit g une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (définie éventuellement sur une partie de $\mathbb{C}$.)
Il lui correspond de façon unique une application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, de la manière suivante :
Au point m d'affixe z, on associe le point M d'affixe $Z = g(z)$.
L'application $f : m(z) \to M(Z)$ est appelée *transformation du plan complexe.*

Cas particuliers simples

$f : m(z) \to M(Z = z + a)$ $(a \in \mathbb{C})$ est la translation de vecteur le vecteur image de a.
$f : m(z) \to M(Z = -z)$ est la symétrie par rapport au point O.
$f : m(z) \to M(Z = \overline{z})$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe Ox.
$f : m(z) \to M(Z = -\overline{z})$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe Oy.
$f : m(z) \to M(Z = \lambda z)$, avec λ réel, est l'homothétie de centre O et de rapport λ.

$f : m(z) \to M(Z = e^{i\theta} z)$ est la rotation de centre O et d'angle θ.
$f : m(z) \to M(Z = iz)$ est la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.
$f : m(z) \to M(Z = jz)$ est la rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$.
Soit a un complexe non nul et $f : m(z) \to M(Z = az)$: f est la composée commutative $(f = h \circ r = r \circ h)$ de l'homothétie h de centre O et de rapport $|a|$, et de la rotation r de centre O et d'angle $\arg(a)\ (2\pi)$.

III.6 Similitudes directes

Proposition

Soient a et b deux nombres complexes, a étant non nul.

Soit f la transformation de $\mathcal{P}$ définie par $m(z) \rightarrow M(Z = az + b)$.

- Si $a = 1$, f est la translation dont le vecteur est le vecteur image de b.
- Si $a \neq 1$, l'application f possède un point invariant unique Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

  f est alors la composée commutative de la rotation r de centre Ω et d'angle $\arg(a)$ et de l'homothétie h de centre Ω et de rapport $|a|$: $f = h \circ r = r \circ h$.

  On dit que f est la *similitude directe* de centre Ω, de rapport $|a|$, d'angle $\arg(a)$.

Remarques

- Si a est réel, f est l'homothétie de centre Ω et de rapport a.
- Supposons $|a| = 1$ (et toujours $a \neq 1$), et posons $a = e^{i\theta}$.
  Alors f est la rotation de centre Ω et d'angle θ (2π).
- Soit f une similitude de rapport ρ.
  Pour tous points M et N images respectives de m et n, on a : $d(M, N) = \rho d(m, n)$.
  Les distances sont donc multipliées par le facteur ρ.
- L'ensemble des transformations $f : m(z) \rightarrow M(Z) = az + b$ (avec $a \neq 0$) est un sous-groupe du groupe $\mathcal{B}(E)$ des bijections du plan $\mathcal{P}$.

III.7 Configurations géométriques

Soient A, B, C, D, quatre points distincts, d'affixes respectifs a, b, c, d.

Mesure d'angle

Une mesure de l'angle de vecteurs (AC, AD) est : $\arg(d-a) - \arg(c-a) = \arg \dfrac{d-a}{c-a}$ (2π).

Condition d'alignement

Les points (A, a), (B, b), (C, c) sont alignés

$\Leftrightarrow \arg(b-a) = \arg(c-a)$ (π)

$\Leftrightarrow \dfrac{b-a}{c-a}$ est réel

$\Leftrightarrow (b-a)(\overline{c} - \overline{a})$ est réel.

Condition d'orthogonalité

Les vecteurs AB et AC sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \arg(b-a) = \arg(c-a) + \dfrac{\pi}{2}$ (π)

$\Leftrightarrow \dfrac{b-a}{c-a}$ est imaginaire pur

$\Leftrightarrow (b-a)(\overline{c} - \overline{a})$ est imaginaire pur.

Condition de cocyclicité

Les points (A, a), (B, b), (C, c) et (D, d) sont sur un même cercle (sont cocycliques)
$\Leftrightarrow$ les angles de vecteurs (AC, AD) et (BC, BD) sont égaux (modulo π)
$\Leftrightarrow \arg \dfrac{d-a}{c-a} = \arg \dfrac{d-b}{c-b}\ (\pi)$
$\Leftrightarrow \arg \dfrac{(d-a)(c-b)}{(c-a)(d-b)} = 0\ (\pi)$
$\Leftrightarrow (d-a)(c-b)(\overline{c}-\overline{a})(\overline{d}-\overline{b})$ est réel.

Triangle équilatéral

Les points A, B, C forment un triangle équilatéral
$\Leftrightarrow a + jb + j^2c = 0$ ou $a + jc + j^2b = 0$
$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Barycentre

L'isobarycentre des points $M_k(z_k)$ $(1 \leq k \leq n)$ est le point G d'affixe $g = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k$.

IV Equations polynômiales dans C

IV.1 Théorème de d'Alembert

Théorème

Tout polynôme P non constant (c'est-à-dire de degré supérieur ou égal à 1), à coefficients complexes, admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Proposition

Tout polynôme P non constant, à coefficients dans $\mathbb{C}$, se factorise en un produit de polynômes du premier degré. Le nombre de racines de P est donc n, chacune étant comptée autant de fois que sa multiplicité.

Proposition *(Racines complexes d'un polynôme à coefficients réels)*

Soit $P = a_n\mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0$ un polynôme à coefficients réels.
Soit α une racine non réelle de P, avec la multiplicité m.
Alors $\overline{\alpha}$ est racine de P avec la même multiplicité.

IV.2 Racines carrées d'un nombre complexe non nul

Proposition

‖ Tout nombre complexe non nul Z admet exactement 2 racines carrées, qui sont opposées.

La méthode est la suivante, en posant $Z = A + iB$, et en cherchant z sous la forme $z = x + iy$:

$$z^2 = Z \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = A \\ 2xy = B \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = A \\ xy = \dfrac{B}{2} \\ x^2 + y^2 = |Z| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{|Z| + A}{2} \\ y^2 = \dfrac{|Z| - A}{2} \\ xy = \dfrac{B}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \varepsilon \sqrt{\dfrac{|Z| + A}{2}} \\ x = \varepsilon' \sqrt{\dfrac{|Z| + A}{2}} \\ \varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\},\ \varepsilon\varepsilon' \text{ du signe de } B \end{cases}$$

IV.3 Equation du second degré

Soit (E) l'équation : $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue z, avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, et $a \neq 0$.

Le *discriminant* de cette équation est le nombre complexe : $\Delta = b^2 - 4ac$.

– Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une racine double $z = -\dfrac{b}{2a}$.

– Si $\Delta \neq 0$, soit δ une des deux racines carrées de Δ.
  L'équation (E) admet deux racines complexes, $z = \dfrac{-b - \delta}{2a}$ et $z = \dfrac{-b + \delta}{2a}$.
  Dans tous les cas, la somme des racines est $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit est $\dfrac{c}{a}$.

– Si $b = 2b'$, on peut utiliser le *discriminant réduit* $\Delta' = b'^2 - ac$.
  Les solutions s'écrivent alors : $z = \dfrac{-b' - \delta'}{a}$ et $z = \dfrac{-b' + \delta'}{a}$ où $\delta'^2 = \Delta'$.

– Si (a, b, c) sont réels, on peut distinguer les deux cas $\Delta > 0$ et $\Delta < 0$:
  Si $\Delta > 0$, les deux solutions de (E) sont réelles et s'écrivent : $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
  Si $\Delta < 0$, elles sont non réelles, conjuguées l'une de l'autre et s'écrivent : $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

IV.4 Racines N-ièmes d'un nombre complexe non nul

Définition

Soit Z un nombre complexe non nul, et n un entier naturel non nul.
On appelle racine n-ième de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

Proposition

Soit $Z = \rho e^{i\theta}$ la forme trigonométrique de Z (avec $\rho > 0$).
Z possède exactement n racines n-ièmes, données par :
$z_k = \rho^{1/n} \exp i \left(\frac{\theta}{n} + 2k\frac{\pi}{n}\right)$, $0 \leq k \leq n-1$.

La méthode est la suivante, en cherchant z sous la forme $z = re^{i\varphi}$ $(r > 0)$:

$$z^n = Z \Leftrightarrow r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\varphi \equiv \theta \ (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi \equiv \frac{\theta}{n} \ (\frac{2\pi}{n}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \\ 0 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

Remarques

- Les points images M_k de ces n racines n-ièmes sont les sommets d'un polygône régulier convexe inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\rho^{1/n}$.
- Les n racines n-ièmes z_k de Z apparaissent dans la factorisation : $z^n - Z = \prod_{k=0}^{n-1}(z - z_k)$.
- En particulier, par identification des termes de degré $n-1$ et des termes constants :
  - ◇ La somme des n racines n-ièmes z_k de Z est nulle (si $n \geq 2$).
  - ◇ Leur produit vaut $(-1)^{n-1}Z$.

IV.5 Racines N-ièmes de l'unité

Proposition

On appelle racines n-ièmes de l'unité les racines n-ièmes dans $\mathbb{C}$ du nombre 1.

Elles sont données par par $\omega_k = \exp \dfrac{2ik\pi}{n}$, avec $0 \leq k \leq n-1$.

Si on note $\omega = \omega_1 = \exp \dfrac{2i\pi}{n}$, alors pour tout k : $\omega_k = \omega^k$ (en particulier $\omega_0 = 1$).

Proposition *(Structure de groupe cyclique)*

L'ensemble des n racines n-ièmes de l'unité s'écrit $\{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\}$.

C'est un sous-groupe cyclique d'ordre n du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$. Il est noté $\mathcal{U}_n$.

ω_k est un générateur de $\mathcal{U}_n$

$\Leftrightarrow \mathcal{U}_n = (\omega_k) = \{1, \omega_k, \omega_k^2, \ldots, \omega_k^{n-1}\}$

$\Leftrightarrow$ les entiers k $(0 \leq k \leq n-1)$ et n sont premiers entre eux.

Propriétés

- -1 est une racine n-ième de l'unité si n est pair : c'est $\omega_{n/2}$.
- Les racines n-ièmes de 1 apparaissent dans la factorisation : $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega_k)$.

  Par identification, on en déduit :

  $$\begin{cases} \text{La somme des racines } n\text{-ièmes de l'unité est nulle (si } n \geq 2). \\ \text{Le produit des racines } n\text{-ièmes de l'unité vaut } (-1)^{n-1}. \end{cases}$$
- Considérons l'équation (E) : $z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + 1 = 0$

  Les $n-1$ racines de (E) sont les $n-1$ racines n-ièmes de l'unité distinctes de 1.
- Pour $n \geq 2$, les points images Ω_k des n racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygône régulier convexe inscrit dans le cercle unité (un sommet est le point d'affixe 1.)
- Si Z est un nombre complexe non nul, et si z_0 est l'une de ses racines n-ièmes, alors les n racines n-ièmes de Z sont les $z_k = \omega_k z_0$, avec $0 \leq k \leq n-1$.

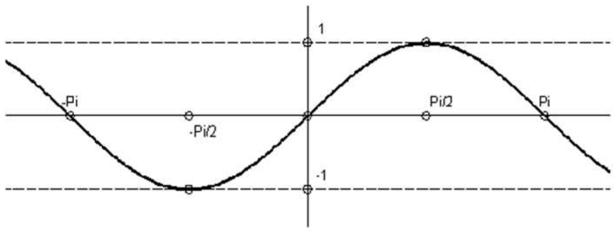
Cas particuliers

- Les deux racines carrées de l'unité sont 1 et -1 : $\mathcal{U}_2 = \{1, -1\} = (-1)$.
- Les racines cubiques de l'unité sont :
  $1, \quad j = \exp\dfrac{2i\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{et} \quad j^2 = \exp\dfrac{4i\pi}{3} = = 1/j.$
  Elles vérifient $1 + j + j^2 = 0$. D'autre part, $j^2 = \overline{j}$. $\mathcal{U}_3 = \{1, j, j^2\} = (j) = (j^2)$.
- Les racines quatrièmes de l'unité sont : 1, i, -1, et $-i$.
  On a : $\mathcal{U}_4 = \{1, i, -1, -i\} = (i) = (-i)$.
  Les trois racines de $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ sont i, -1, et $-i$.
- Les racines cinquièmes de l'unité sont $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$, avec $\omega = \exp\dfrac{2i\pi}{5}$.
  Compte tenu du fait que 5 est premier, $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ engendrent tous $\mathcal{U}_5$.
- Les racines sixièmes de l'unité sont : $1, \ -j^2 = \exp\dfrac{i\pi}{3}, \ j, \ -1, \ j^2$, et $-j$.
  On a : $\mathcal{U}_6 = (-j^2) = (-j)$.

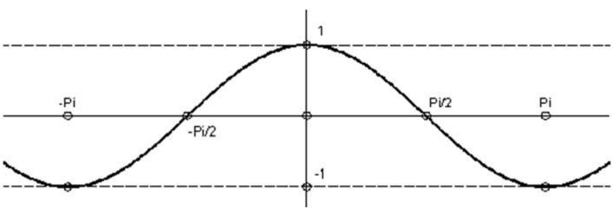
V Trigonométrie

V.1 Applications sinus et cosinus

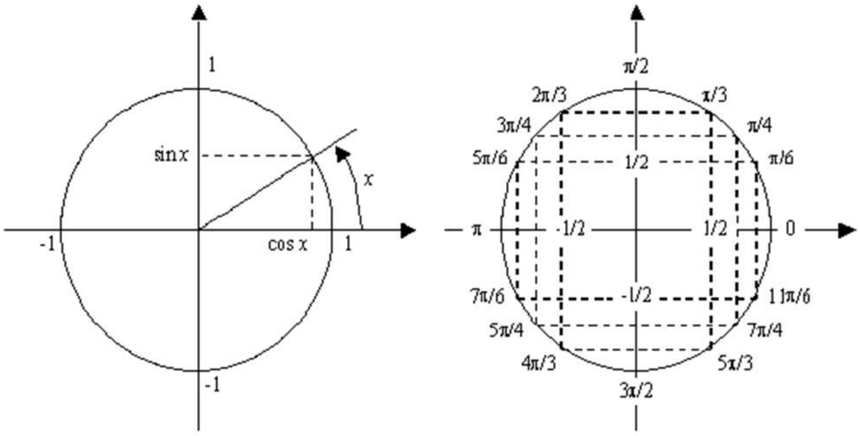
- Les applications $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont définies et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Représentation graphique de $y = \sin x$:



- Représentation graphique de $y = \cos x$:



– Représentations utilisant le cercle trigonométrique :
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $|\cos x| \leq 1$, $|\sin x| \leq 1$.
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R},\ \begin{cases} a = \cos\alpha \\ b = \sin\alpha \end{cases}$



– Valeurs particulières de $\sin x$ et de $\cos x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

– Les applications $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont 2π-périodiques.
L'application $x \mapsto \sin x$ est impaire et l'application $x \mapsto \cos x$ est paire.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \sin(x + 2\pi) = \sin x \\ \cos(x + 2\pi) = \cos x \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x \end{cases}$$

– Passage de x à $\pi \pm x$ et à $\frac{\pi}{2} \pm x$:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\sin(\tfrac{\pi}{2} + x) = \cos x \qquad \cos(\tfrac{\pi}{2} + x) = -\sin x \qquad \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) = \cos x \qquad \cos(\tfrac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

– Dans les notations suivantes, k est un entier relatif quelconque :

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \text{ ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} \qquad \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \text{ ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

– Dérivées successives :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \sin' x = \cos x \\ \cos' x = -\sin x \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin^{(n)} x = \sin(x + n\frac{\pi}{2}) \\ \cos^{(n)} x = \cos(x + n\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

– Cosinus et sinus d'une somme ou d'une différence. Pour tous réels x et y :

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x \end{cases}$$

– Transformations de produits en sommes et de sommes en produits. Pour tous réels x, y, p, q :

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) \\ \sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)) \\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2} \end{cases}$$

V.2 Applications tangente et cotangente

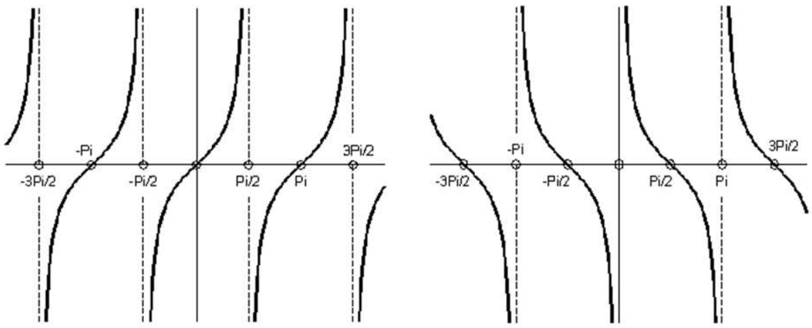
– L'application $x \mapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est indéfiniment dérivable sur $\left\{x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2}\ (\pi)\right\}$.

L'application $x \mapsto \text{cotan}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ est indéfiniment dérivable sur $\{x \in \mathbb{R}, x \neq 0\ (\pi)\}$.

– Les applications $x \mapsto \tan x$ et $x \mapsto \text{cotan}\, x$ sont impaires et π-périodiques :

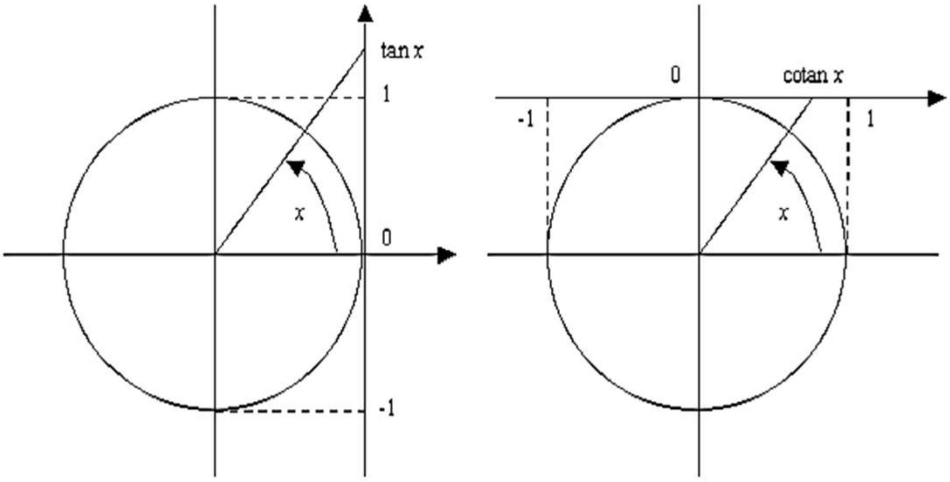
$$\begin{cases} \tan(-x) = -\tan x \\ \text{cotan}\,(-x) = -\text{cotan}\, x \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan(x+\pi) = \tan x \\ \text{cotan}\,(x+\pi) = \text{cotan}\, x \end{cases}$$

– Représentations graphiques de $y = \tan x$ (à gauche), et $y = \text{cotan}\, x$ (à droite)



– Trois valeurs particulières : $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

– Interprétation de $\tan x$ et $\text{cotan}\, x$ sur le cercle trigonométrique :



– Passage de x à $\pi - x$ ou à $\frac{\pi}{2} \pm x$:

$$\tan(\pi - x) = -\tan x, \quad \tan(\tfrac{\pi}{2} + x) = -\frac{1}{\tan x}, \quad \tan(\tfrac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan x}$$

– Pour tout réel $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(\pi)$: $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha\,(\pi)$. En particulier :

$$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = 0\ (\pi), \quad \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \tfrac{\pi}{4}\ (\pi), \quad \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\tfrac{\pi}{4}\ (\pi)$$

– Dérivées : $\tan' x = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\quad \text{cotan}\,' x = -1 - \text{cotan}\,^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

– Tangente d'une somme ou d'une différence :

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}, \quad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

– Utilisation du changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

V.3 Linéarisation

- Formules d'Euler : $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
- Ces formules permettent de calculer les puissances de $\cos x$ et de $\sin x$ en fonction de quantités du type $\cos(px)$ et/ou $\sin(px)$. Cette opération est appelée *linéarisation*.

  Pour cela on écrit $\cos^n x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$, $\sin^n x = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n$. On développe ensuite ces puissances par la formule du binôme, et on regroupe les termes équidistants des extrémités. On réutilise alors les formules d'Euler pour retouver des $\cos(px)$ et/ou des $\sin(px)$.

- Exemples :

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right) = \frac{1}{8}\left(\cos 4x - 4\cos 2x + 3\right)$$

$$\begin{aligned}\cos^5 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\left(e^{5ix}+5e^{3ix}+10e^{ix}+10e^{-ix}+5e^{-3ix}+e^{-5ix}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^5 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{16}\,\frac{1}{2i}\left(e^{5ix}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-3ix}-e^{-5ix}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^6 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}\left(e^{6ix}+6e^{4ix}+15e^{2ix}+20+15e^{-2ix}+6e^{-4ix}+e^{-6ix}\right)\\ &= \frac{1}{32}\left(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10\right)\end{aligned}$$

V.4 Opération inverse de la linéarisation

- Formule de Moivre : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$.
- Elle permet d'exprimer $\cos(nx), \sin(nx)$ en fonction de puissances de $\cos x$ et/ou de $\sin x$.
  On développe $(\cos x + i \sin x)^n$ par la formule du binôme. La partie réelle (resp. imaginaire) du résultat est alors égale à $\cos(nx)$ (resp. $\sin(nx)$).
  Si on cherche à obtenir un résultat où figurent surtout des puissances de $\cos x$ (resp. de $\sin x$) il convient de remplacer les puissances paires de $\sin x$ (resp. de $\cos x$) par des puissances de $(1-\cos^2 x)$ (resp. de $(1-\sin^2 x)$) puis de développer.
- Exemples :

$$
\begin{aligned}
(\cos x + i \sin x)^4 &= \cos^4 x + 4i\cos^3 x \sin x - 6\cos^2 x \sin^2 x - 4i \cos x \sin^3 x + \sin^4 x \\
&\Rightarrow \begin{cases} \cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x \\ \sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x(1-\cos^2 x) + (1-\cos^2 x)^2 \\ \sin 4x = 4\cos x((1-\sin^2 x)\sin x - \sin^3 x) \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \\ \sin 4x = 4\cos x(-2\sin^3 x + \sin x) \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\cos x + i \sin x)^5 &= \cos^5 x + 5i\cos^4 x \sin x - 10\cos^3 x \sin^2 x \\
&\quad -10i\cos^2 x \sin^3 x + 5\cos x \sin^4 x + i \sin^5 x \\
&\Rightarrow \begin{cases} \cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x \\ \sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x(1-\cos^2 x) + 5\cos x(1-\cos^2 x)^2 \\ \sin 5x = 5(1-\sin^2 x)^2 \sin x - 10(1-\sin^2 x)\sin^3 x + \sin^5 x \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x \\ \sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x \end{cases}
\end{aligned}
$$

- Dans ce dernier cas, la formule donnant $\sin 5x$ se déduit facilement de celle donnant $\cos 5x$.
  En effet, en posant $x = \frac{\pi}{2} - y$, on trouve :

$$
\begin{aligned}
\sin 5x &= \sin\left(\frac{5\pi}{2} - 5y\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5y\right) \\
&= \cos 5y = 16\cos^5 y - 20\cos^3 y + 5\cos y = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x
\end{aligned}
$$