Travaux pratique N° 01 de la matière Optimisation

Soit la fonction

$$f(x,y) = (x-1)^2 + y^3 - xy \quad (1)$$

Supposant nous sommes sur un point $x_k = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ (on met $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \equiv x$). On veut avancer vers le minimum de cette fonction selon une direction $d_k = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$. Pour choisir le pas d'avancement α, on minimise la fonction

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + \alpha\, d_k) \equiv \varphi(\alpha) \quad (1)$$

Nous avons, $x_{k+1} = x_k + \alpha d_k$

Remplaçant les valeurs de $x_k\ et\ d_k$

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix}1+\alpha\\1-2\alpha\end{bmatrix} \quad (2)$$

Par substitution de (2) dans (1) on obtient

$$f(x_k + \alpha\, d_k) \equiv \varphi(\alpha) = \alpha^2 + (1-2\alpha)^3 - (1+\alpha)(1-2\alpha)$$

1- Tracer la courbe de cette fonction i.e $\varphi(\alpha)$, dans l'intervalle$[0, 0.4]$.
2- Ecrire une fonction dichotomous.m qui fait la minimisation d'une fonction unimodale avec la méthode de la dichotomie, les entrées seront : la fonction à minimiser, l'intervalle initiale $[a,b]$, le paramètre ε et la précision l. Les sorties sont : la valeur optimale $x^\star$, un vecteur de la série des solutions généré x_k, et le nombre des itérations faites k. À prendre $[a,b] = [0\ \ 0.4]$, $\varepsilon = 10^{-4}, l = 0.001$.
3- Faites le même travail pour la méthode de la section d'or, on appellera la fonction Matlab® dans ce cas : goldenSection.m.
4- Ecrire une fonction armijo.m qui implémente la méthode d'Armijo. Les entrées seront : la fonction à minimiser, x_k : le point actuel, g : le gradient de la fonction à x_k et d_k : la direction de recherche. La sortie étant α_{opt}. à prendre $\beta = 0.1, \tau = 0.5$ et $\alpha_0 = 1$.
5- Ecrire une fonction newraph.m qui implémente la méthode de Newton-Raphson. Les entrées de la fonction sont $\varphi'(\alpha), \varphi''(\alpha)$ et α_0=0.5. Les sorties sont α optimal et la série α_k générée.
6- Calculer le minimum de $\varphi(\alpha) = \alpha^2 + (1-2\alpha)^3 - (1+\alpha)(1-2\alpha)$ par application des conditions d'optimalité.
7- Ecrire un programme principal pour utiliser les fonctions précédentes pour minimiser la fonction $\varphi(\alpha)$, puis tracer l'évolution de x optimal générer par les quatre méthodes sur le même graphe, Comparer et commenter les résultats. Pour l'appel des fonctions utiliser les paramètres suivants

Dichotomous.m: $[a,b] = [0\ \ 0.4]$, $\varepsilon = 10^{-4}, l = 0.001$.
goldenSection.m : $[a,b] = [0\ \ 0.4]$, $l = 0.001$.
armijo.m : $\beta = 0.1, \tau = 0.5$ et $\alpha_0 = 1$.
newRaph.m : essayer avec α_0=0.5 puis avec $\alpha_0 = 1$ (justifier les deux résultats)

Par Y.HIMOUR (y.himour@univ-dbkm.dz)

Dernier délai pour recevoir les comptes rendus par email est le 6 Fevrier 2021. Tout émail arrivant après cette date ne sera pas pris en compte.

La vidéo du cours qui concerne la recherche linéaire :
https://www.youtube.com/watch?v=VqvfMHKLzg4
Vous pouvez trouver la polycopie du cours en l'occurrence sur la plateforme elearning.univ-km.dz