Université Djilali Bounaama
Faculté des sciences et de la technologie
Département MI 2020/2021

Analyse 1

Série n1

Exercice 1:

1. $\forall x \in \mathbb{R} : |x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$.
2. $\forall x \in \mathbb{R} : \big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.
3. $\forall x \in \mathbb{R} : |x+y| \leq |x| + \min\{|y|, |x+y|\}$.
4. $(\forall \varepsilon > 0 : 0 \leq x < \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.

Exercice 2 :

Soient x et y deux réels tels que $0 < x \leqslant y$. On pose

$m = \frac{x+y}{2}$ (moyenne arithmétique),

$g = \sqrt{xy}$ (moyenne géométrique) et

$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$ (moyenne harmonique)

Montrer que $x \leqslant h \leqslant g \leqslant m \leqslant y$.

Exercice 3 :

Calculer la somme

1- S_n des n premiers entiers impairs.

2- $S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1) \cdot n$.

3- $U = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!$

4- $T = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \cdots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1$.

5- $V = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$

Connaissant les expressions de $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$, trouver celles de $\sum_{k=1}^{n} k^3$ et de $\sum_{k=1}^{n} k^4$.

Exercice 4 :

Soit $[x]$ la partie entière de x, montrer que :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow [x] \leq [y]$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{Z} : [x+a] = [x] + a$.
3. *Est-ce-que* $[x+y] = [x] + [y]$ *et* $[xy] = [x][y]$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *?*
4. $[x] + [-x] = \begin{cases} 0, & si\ x \in \mathbb{Z}; \\ -1, & si\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}. \end{cases}$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* : \left[\frac{[nx]}{n}\right] = [x]$.

Exercice 5 :

Soient A et B deux ensembles non vides et bornés de $\mathbb{R}$, montrer que :

1. $A \subset B \Rightarrow \inf(A) \geq \inf(B)$.
2. $A \subset B \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$.
3. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$
4. $\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On définit : $-A = \{-x; x \in A\}$.

Montrer que si A est borné, alors $\sup(-A) = -\inf(A)$ *et* $\inf(-A) = -\sup(A)$.

Exercice 6:

Déterminer -lorsqu'ils existent- l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants la borne inférieure (inf), *la borne supérieure* (sup), *le plus petit élément* (min) *et le plus grand élément* (max) *des parties de $\mathbb{R}$ suivantes*

$$A_1 = [0, 1[, A_2 =]-2, 7] \cup \{11\}, A_3 = \left\{-\frac{1}{x} : 1 \leq x \leq 2\right\}, A_4 = \left\{2 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\},$$

$$A_5 = \left\{\frac{n^2-1}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}^*\right\}, A_6 = \left\{\sup\left(\frac{1+n}{n}, \pi + \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*\right\}, A_7 = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\},$$

$$A_8 = \left\{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 7:

Soit n un entier naturel. Calculer les sommes :

- $A = C_n^0 + 2C_n^2 + \cdots + 2^p C_n^{2p} + \cdots$.
- $B = C_n^1 + 2C_n^3 + \cdots + 2^p C_n^{2p+1} + \cdots$.
- $C = C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n = \sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k$.
- $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}C_n^k$.