Chapitre 2

Les bilans de matière, de quantité de mouvement et d'énergie

Lorsque l'on cherche à résoudre un problème où interviennent des transferts de masse, énergie, quantité de mouvement, . . . il est naturel de faire un bilan de ces grandeurs extensives. Ces bilans portent parfois le nom d'équations de conservation même si certaines grandeurs ne se conservent pas (ex : dissipation d'énergie mécanique par frottement visqueux).

Forme générale d'un bilan

Remarquons tout d'abord que les bilans ne concernent que les grandeurs extensives. En effet , des grandeurs intensives, telles que la température ou la couleur d'un objet, ne s'ajoutent pas et ne peuvent donc pas faire l'objet d'une comptabilité.

Le bilan d'une grandeur extensive F prend la forme très générale suivante :

$$\begin{aligned}&Variation\ de\ la\ grandeur\ contenue\ dans\ le\ volume\ \Omega\\ &\qquad = Flux\ entrant\ par\ la\ frontiere\ \partial\Omega + Création\ dans\ le\ coeur\ du\ volume\Omega\end{aligned}$$

Un tel bilan peut être établi pour un volume de contrôle macroscopique (fini) ou un volume de contrôle microscopique (infinitésimal). Dans le premier cas, le terme de variation est dF/dt tandis que dans le deuxième cas, nous allons voir qu'il est égal à $\partial f/\partial t$ où la densité volumique f est définie par :

$$f = \lim_{V\to 0} \frac{F}{V} \qquad c'est\ à\ dire \qquad F_{(t)} = \iiint_{\Omega(t)} f(t).dV$$

I- Equation de conservation de la masse

le bilan local de masse qui porte le nom **d'équation de continuité**. On trouve ci-dessous les expressions eulérienne et lagrangienne respectivement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0$$

Pour un fluide incompressible, la masse volumique ρ est une constante (dans le temps et l'espace). Par conséquent, le bilan de masse se simplifie en :

$$div\ \vec{v} = 0$$

II-Equation de conservation de la quantité de mouvement

Faire le bilan de quantité de mouvement revient à écrire le bilan des forces sur un petit élément de volume dont on suivra la trajectoire.

Ce bilan des forces prend le nom d'équation de Cauchy. Pour un système sans force électro-magnétique, on a :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = div\,\sigma + \rho\vec{g}$$

Où σ représente le tenseur des contraintes totales. Ce bilan des forces peut être ré-écrit :

$$\frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t} = div(\sigma - \rho\vec{v}\otimes\vec{v}) + \rho\vec{g}$$

Cette formulation montre que le flux diffusif de quantité de mouvement est égal au tenseur des contraintes et que le terme source est égal à la somme des forces volumiques qui s'exercent à distance (gravité, force électrostatique, force électromagnétique, . . .).

Ou la pression p et τ le tenseur des contraintes de cisaillement sont définis par les relations :

$$p = \frac{-Trace\ (\sigma)}{3} \qquad\qquad \sigma = \tau - p.I$$

Avec ces notations, le bilan local de quantité de mouvement s'écrit de l'une ou l'autre manière :

$$B.L\ de\ q^{té}\ de\ m^{vt}(Eq.de\ Cauchy) : \begin{cases} \dfrac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t} + div\ (\rho\vec{v} \otimes \vec{v}) = div\,\tau - \nabla p + \rho\vec{g} \\ \rho.\left[\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla)\vec{v}\right] \qquad = div\,\tau - \nabla p + \rho\vec{g} \\ \rho\dfrac{D\vec{v}}{Dt} \qquad\qquad\qquad = div\,\tau - \nabla p + \rho\vec{g} \end{cases}$$

Le bilan de quantité de mouvement, lorsque le fluide est incompressible et newtonien de viscosité constante, porte le nom d'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}$$

Cas particulier des écoulements à fort nombre de Reynolds. Ce cas se rencontre pour un écoulement très turbulent (vitesse très élevée) ou bien un fluide parfait (viscosité nulle). Dans l'équation de Navier-Stokes, le terme visqueux est négligeable et l'on obtient **l'équation d'Euler** :

$$\rho . \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + +\rho \vec{g}$$

III- Equation de conservation de l'énergie mécanique :

L'énergie mécanique E_m est la somme des énergies cinétique Ec et potentielle Ep :

$$E_m = E_c + E_p \qquad d'ou \qquad e_m = e_c + e_p = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \Psi$$

où e_m, e_c et e_p sont leur densité volumique respective et Ψ le potentiel gravitationnel.

Pour établir le bilan local d'énergie mécanique, on va ajouter membre à membre les bilans locaux d'énergie cinétique et d'énergie potentielle.

$$B.L \ \ d'énergie\ mécanique : \begin{cases} \frac{\partial e_m}{\partial t} = -div(e_m . \vec{v} - \sigma^T . \vec{v}) - \rho^T : (\nabla \vec{v}) \\ \end{cases}$$

Cas particulier pour un écoulement incompressible et stationnaire :

$$\frac{\partial e_m}{\partial t} = -div\left(\frac{1}{2}\rho v^2 . \vec{v} + \rho \Psi \vec{v}\right) + \vec{v} . div\ \sigma$$