علامات الجمع" $\sum$ " و الجداء " $\prod$ " :

إن الاستعمال الشائع لرمزي الجداء " $\prod$ " و الجمع " $\sum$ في ميدان الاحصاء يدعونا الى التعرف أكثر عليهما و على خصائص استعمالهما . ان الهدف من هذا الجزء هو تمكين الطالب من التعود على استعمالهما .

أ- **علامة الجمع" $\sum$ " (تقرأ سيغما):**

1- **تعريف :** عندما يأخذ متغير احصائي القيم التالية : $x_1, x_2, x_3 \ldots$ و بدل كتابة المجموع بالطريقة :

$x_1 + x_2 + x_3$ فانه يمكن التعبير عن نفس المجموع و بطريقة مختصرة كالتالي :

$$\sum_{i=1}^{3} x_i$$

و نقرأ : مجموع x_i من i يساوي 1 إلى 3 (أو مجموع x_i مع i يتغير من 1 إلى 3)

يمكن التعميم :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

2- **خواص الرمز " $\sum$" :**

- اذا كان كل حد مضروبا في ثابت حقيقي « a » ، فإننا نستطيع أن نضعه كعامل مشترك :

$$ax_1 + ax_2 + \cdots + ax_n = a(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

و منه:

$$\sum_{i=1}^{n} ax_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- تجزئة المجموع ، اذا كان $x_i = y_i + z_i + w_i$ فمن أجل كل i لدينا :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i + z_i + w_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i + \sum_{i=1}^{n} w_i$$

إذا كان هناك b بحيث $1 < b < n$ اذن نستطيع أن نجزئ المجموع كما يلي :

$$\sum_{i=1}^{b} x_i + \sum_{i=b+1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

3- تطبيقات :

- مجموع ثابت حقيقي « a » n مرة :

$$\sum_{i=1}^{n} a = a + a + a + \cdots + a = n.a$$

ومنه

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + a) = \sum_{i=1}^{n} x_i + n.a \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{n} ax_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- نشر بعض المجاميع الشهيرة :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + a)^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + na^2 + 2a\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

ب- رمز الجداء " $\prod$ " (وتقرأ pi) :

1- **تعريف :** عندما يأخذ متغير إحصائي القيم التالية : x_1, x_2, x_3 ... و بدل كتابة الجداء بالطريقة :

$x_1 \times x_2 \times x_3$ فانه يمكن التعبير عن نفس الجداء و بطريقة مختصرة كالتالي :

$$\prod_{i=1}^{3} x_i = x_1 \times x_2 \times x_3$$

و نقرأ : جداء x_i من i يساوي 1 إلى 3 (أو جداء x_i مع i يتغير من 1 إلى 3)

2- **خواص الرمز" $\prod$ " :**

- الثابت الخرج من رمز الجداء يرفع قوة n :

$$\prod_{i=1}^{n} ax_i = a^n \prod_{i=1}^{n} x_i$$

- اذا كان $b < n$

$$\prod_{i=1}^{b} x_i \times \prod_{i=b+1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{و} \qquad \prod_{i=1}^{n} a = a^n$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i\, y_i = \prod_{i=1}^{n} x_i \times \prod_{i=1}^{n} y_i$$

نعلم أن $\log(x \times y) = \log x + \log y$

اذن يمكن كتابة : $\log(x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n) = \log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n$

بالطريقة التالية : $\log \prod_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \log x_i$

تمارين محلولة

التمرين الأول : فكك المجاميع التالية

- $\sum_{i=1}^{6} x_i$
- $\sum_{i=1}^{4} (x_i - 3)^2$
- $\sum_{i=1}^{n} k$ حيث k ثابت حقيقي

التمرين الثاني : أكتب المجاميع باستعمال رمز الجمع

- $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$
- $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \cdots + x_n + y_n$
- $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$
- $a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots$
- $x_1(a_1 + b_1) + x_2(a_2 + b_2) + \cdots + x_n(a_n + b_n)$
- $x_0 y_4 + x_1 y_7 + x_2 y_{10} + \cdots + x_n y_m$

التمرين الثالث : ليكن الجدول التالي :

x_i	2	-5	4	-8
y_i	-3	-8	10	6

أحسب ما يلي :

$\sum x_i$ ، $\sum y_i$ ، $\sum x_i y_i$ ، $\sum {x_i}^2$ ، $\sum {y_i}^2$

$\sum x_i \sum y_i$ ، $\sum x_i y_i^2$

$$\sum (x_i + y_i)(x_i - y_i)$$

حل التمارين

حل التمرين الأول :

- $\sum_{i=1}^{6} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$
- $\sum_{i=1}^{4}(x_i - 3)^2 = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + (x_3 - 3)^2 + (x_3 - 3)^2$
- $\sum_{i=1}^{n} k = k + k + \cdots + k = nk$

حل التمرين الثاني :

- $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$
- $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + \cdots + x_n + y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$
- $= \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)$
- $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = \sum_{i=1}^{6} i^2$
- $a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1}$
- $x_1(a_1 + b_1)^2 + x_2(a_2 + b_2)^2 + \cdots + x_n(a_n + b_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i (a_i + b_i)^2$
- $x_0 y_4 + x_1 y_7 + x_2 y_{10} + \cdots + x_n y_m = \sum_{i=1}^{n+1} x_{i-1} y_{3i+1}$

جواب التمرين الثالث :

$\sum x_i = -7$ ، $\sum y_i = 5$ ، $\sum x_i y_i = 26$ ، $\sum x_i^2 = 109$ ، $\sum y_i^2 =$ 209 ،

$\sum x_i \sum y_i = (-7)(5) = -35$ ، $\sum x_i y_i^2 = -190$

$\sum (x_i + y_i)(x_i - y_i) = -100$