Chapitre 2

Ensembles et Applications

Sommaire

2.1 Ensembles

Définition 2.1.1. *On entend par ensemble toute collection ou tout assemblage d'objets appelés éléments d'ensemble. On notera, en général, un élément par une lettre minuscule (l'élément x) et un ensemble par une lettre majuscule (l'ensemble E). On note*

$$x \in E$$

si x est un élément de E, et $x \notin E$ dans le cas contraire. Un ensemble peut être fini ou infini.
- Un ensemble constitué d'un nombre fini d'éléments distincts peut être défini par extension : par une énumération explicite de tous ses éléments qu'on met généralement entre accolades.
- Un ensemble constitué d'un nombre infini (ou même fini) peut être donné en compréhension, c'est-à-dire par une ou des propriétés définissant ses éléments.

Exemple 2.1.1. • *Ensembles donnés en extension :*
$\{0, 1, 3\}$, $\{T, \perp, \triangleright\}$, $\{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$

- *Ensembles donnés en compréhension*
  $\{x \in \mathbb{R}/\, |x-1| < 2\} = \,]-1, 3\,[, \;\; \{z \in \mathbb{C}/z^5 = 3\}$
- *Un ensemble formé d'un et un seul élément est appelé* ***singleton****.*
  Par exemple
  $$\{n \in \mathbb{N}/ -0.1 < n < 0.1\} = \{0\}\,.$$
- *Un ensemble particulier est l'ensemble vide, noté* $\varnothing$*, qui est l'ensemble ne contenant aucun élément.*

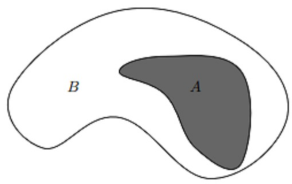
2.1.1 Inclusion

Définition 2.1.2. *A et B deux ensembles. Lorsque tout élément de A est aussi un élément de B, on dit que A est un sous-ensemble de B ou A est une partie de B. On dit aussi que A est inclus dans B, ce que l'on note par* $A \subset B$ *et on a formellement*

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Quand A n'est pas une partie de B, on note $A \not\subset B$ *et on a formellement :*

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x, (x \in A) \wedge (x \notin B).$$



$A \subset B$

Exemple 2.1.2.
$\mathbb{Z}$ *: ensemble des entiers relatifs*
$\mathbb{Q}$ *: ensemble des nombres rationnels*
$\mathbb{D}$ *: ensemble des nombres décimaux*
$\mathbb{C}$ *: ensemble des nombres complexes*
On a les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Définition 2.1.3. *Deux ensembles A et B sont dits égaux si et seulement s'ils contiennent les mêmes éléments.*

$$(A = B) \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

ou encore

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

Définition 2.1.4. *Soit E un ensemble. L'ensemble de toutes les parties de E constitue un nouvel ensemble noté $\mathcal{P}(E)$. Il est parfois appelé* ***ensemble puissance****.*

Remarque 2.1.1.

- *Soit E un ensemble à n éléments. Alors, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est fini, et a 2^n éléments.*
- *Pour tout ensemble E,$\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide car E et $\varnothing$ appartiennent à $\mathcal{P}(E)$.*
- $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$
- $\{x\} \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow x \in E$

Exemple 2.1.3. *Si $E = \{-1, 0, 1\}$, on a*

$$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, E\}$$

2.1.2 Opérations sur les ensembles

Considérons un ensemble E.

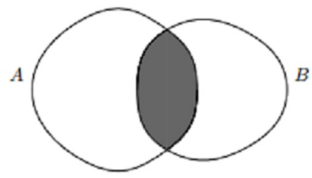
1)- Intersection

Définition 2.1.5. *Soient A et B deux parties de E. On appelle intersection des ensembles A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. Celui-ci est noté $A \cap B$. Lorsque $A \cap B = \varnothing$ (c'est-à-dire lorsque A et B n'ont aucun élément commun), on dit que A et B sont disjoints. On écrit alors*

$$A \cap B = \{x \in E / (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

ou encore

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$



$A \cap B$

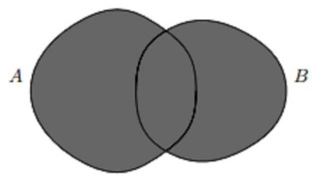
2)- Réunion

Définition 2.1.6. *Soient A et B deux parties de E. On appelle réunion des ensembles A et B l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B. Cet ensemble est noté $A \cup B$. Le « ou » n'est pas exclusif : x peut appartenir à A et à B en même temps.*

$$A \cup B = \{x \in E/(x \in A) \vee (x \in B)\}$$

ou encore

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$$



$A \cup B$

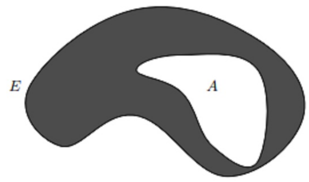
3)- Complémentaire

Définition 2.1.7. *Soit A un sous-ensemble de E. On appelle complémentaire de A dans E, et l'on note $\complement_E^A$, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.*

$$\complement_E^A = \{x \in E/x \notin A\}$$

ou encore

$$x \in \complement_E^A \Leftrightarrow x \notin A$$



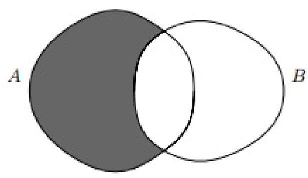
Exemple 2.1.4. *Soit l'ensemble* $A = \{2n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ *alors*

$$\complement_{\mathbb{N}}^{A} = \{2n+1 \ / \ n \in \mathbb{N}\}$$

4)- Différence

Définition 2.1.8. *Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle différence de A et de B dans cet ordre, et on note $A \setminus B$, l'ensemble des éléments de E appartenant à A mais pas à B.*

$$A \setminus B = \{x \in E/(x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$



Exemple 2.1.5. *Soit* $E = \mathbb{R}$, $A = [-3, 3]$, $B = [0, 1]$. *On obtient*

$$A \setminus B = [\,-3, 0\,[\ \cup\ ]\,1, 3\,]$$

et

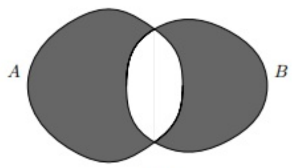
$$B \setminus A = \varnothing.$$

On voit bien que la différence des ensembles n'est pas commutative.

5)- Différence symétrique

Définition 2.1.9. *Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle différence symétrique de A et B, et on note $A\Delta B$, l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B. le «ou» est exclusif c-à-d qu'un élément ne doit pas appartenir à A et à B simultanément. On a alors*

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



$A\Delta B$

Exemple 2.1.6. *Soient les ensembles suivants*
$E = \mathbb{N}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 6\}$, *on a alors*

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{0, 2, 4, 5, 6\}$$

2.1.3 Propriétés des opérations sur les ensembles

Quels que soient A, B et C des sous-ensembles d'un même ensemble E, on a les propriétés suivantes.

- **Commutativité**
  $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$

- **Associativité**
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

- **Distributivité**
  $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ et $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$
  Les opérations $\cap$ et $\cup$ sont distributives l'une sur l'autre.

- **Idempotence**
  $A \cap A = A$ et $A \cup A = A$

- **Lois de Morgan**

  $\complement_E^{(A\cap B)} = \complement_E^A \cup \complement_E^B$ et $\complement_E^{(A\cup B)} = \complement_E^A \cap \complement_E^B$

  Remarque 2.1.2. *La démonstration se déduit directement des propriétés des lois de Morgan pour les connecteurs $\wedge$ et $\vee$.*

2.1.4 Partition

Définition 2.1.10. *Soient E un ensemble et $A_1, A_2, ..., A_n$ des sous-ensembles de E. On dit que ces sous-ensembles forment une partition de E si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *Chacun de ces ensembles est non vide :*
$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, A_i \neq \varnothing.$$
2. *Ils sont deux à deux disjoints :*
$$\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\},\ i \neq j,\ A_i \cap A_j = \varnothing.$$
3. *Leur union est égale à E :*
$$\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i = E.$$

Exemple 2.1.7. *Voici quelques exemples simples :*

- $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. *Alors les sous-ensembles* $\{0, 1, 2\}$, $\{3, 5, 7\}$, $\{4, 6\}$ *et* $\{8\}$ *constituent une partition de E.*
- *Soient $E = \mathbb{N}$, A_1 le sous-ensemble formé par les entiers pairs, A_2 le sous-ensemble formé par les entiers impairs. Alors, les sous-ensembles A_1 et A_2 forment une partition de E.*
- *Soient $E = \mathbb{R}$, $A_1 = \,]-\infty, 1\,[$, $A_2 = [1, 2]$, $A_3 = \,]\,2, +\infty\,[$. Alors, les sous-ensembles A_1, A_2 et A_3 forment une partition de E.*

2.1.5 Produit Cartésien

Définition 2.1.11. *On appelle le produit cartesien des ensembles A et B, l'ensemble des éléments (a, b), tels que $a \in A$ et $b \in B$ dans l'ordre de leurs écriture. On le note par $A \times B$.*

$$A \times B = \{(a, b)/(a \in A) \wedge (b \in B)\}$$

Le système ordonné (a, b) s'appelle un couple ; a est la 1ère ordonnée ou composante, b est la 2ième ordonnée ou composante du couple (a, b).

Définition 2.1.12. *On appelle le produit cartésien d'une famille d'ensembles $A_i, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des systèmes $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de n éléments ordonnés $a_i \in A_i$. Ces sytèmes ordonnés sont appelés des triplets pour $n = 3$, des quadruplets pour $n = 4$ et des n-uplets pour n. On le note par $A_1 \times A_2 \times ...A_n$ ou en abréviation $\prod\limits_{i=1}^{i=n} A_i$.*
Lorsque $A_i = A$, le produit $\prod\limits_{i=1}^{i=n} A_i$ se note A^n.

Exemple 2.1.8. *$A = \{1, 2\}$ et $B = \{*, T, \Delta\}$*

$$A \times B = \{(1, *), (1, T), (1, \Delta), (2, *), (2, T), (2, \Delta)\}$$

2.1.6 Exercices sur les ensembles

Exercice 2.1.1. *Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Simplifier les ensembles suivants :*
$(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{C \cup \overline{A}})$, $(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{C \cap \overline{A}})$
où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E.

Exercice 2.1.2. *Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que*

1. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
3. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

4. *$A \subset B \Longleftrightarrow A \cap B = A \Longleftrightarrow A \cup B = B \Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.*

Exercice 2.1.3. *Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E.*

1. *Que dire de A et B tels que $A \cup B = A \cap B$?*
2. *Montrer que si $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$ alors $B \subset C$.*

Corrigés

Corrigé 2.1.1.

$$\begin{array}{rcl}
\overline{A \cup B} \cap \overline{C \cup \overline{A}} & = & (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{C} \cap A) \ (\textit{Lois de Morgan}) \\
& = & (\overline{A} \cap A) \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \ (\cap \textit{ est associative}) \\
& = & \varnothing \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\
& = & \varnothing \\
\overline{A \cap B} \cup \overline{C \cap \overline{A}} & = & (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (\overline{C} \cup A) \ (\textit{Lois de Morgan}) \\
& = & (\overline{A} \cup A) \cup (\overline{B} \cup \overline{C}) \ (\cup \textit{ est associative}) \\
& = & E \cup (\overline{B} \cup \overline{C}) \\
& = & E
\end{array}$$

Corrigé 2.1.2.

1. *Pour montrer l'égalité, on montre*

$$\forall x, x \in \overline{A \cap B} \Longleftrightarrow x \in (\overline{A} \cup \overline{B})$$

$$\begin{array}{rcl}
x \in \overline{A \cap B} & \Longleftrightarrow & x \notin (A \cap B) \\
& \Longleftrightarrow & \overline{x \in (A \cap B)} \\
& \Longleftrightarrow & \overline{(x \in A) \wedge (x \in B)} \\
& \Longleftrightarrow & \overline{(x \in A)} \vee \overline{(x \in B)} \\
& \Longleftrightarrow & (x \notin A) \vee (x \notin B) \\
& \Longleftrightarrow & (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B}) \\
& \Longleftrightarrow & x \in (\overline{A} \cup \overline{B})
\end{array}$$

d'où

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

2. *Même raisonnement que (1)*

3.

$$\begin{array}{rcl}
x \in A\Delta B & \Leftrightarrow & x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\
& \Leftrightarrow & (x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A) \\
& \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \\
& \Leftrightarrow & [(x \in A) \vee (x \in B \wedge x \notin A)] \wedge [(x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)] \\
& \Leftrightarrow & [(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A)] \\
& & \wedge[(x \notin B \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \notin A)] \\
& \Leftrightarrow & [x \in (A \cup B) \cap E] \wedge [x \in E \cap \overline{A \cap B}] \\
& \Leftrightarrow & x \in (A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B) \\
& \Leftrightarrow & x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B).
\end{array}$$

D'où

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

4. En se basant sur la transitivité de «$\Rightarrow$», Il suffit de montrer que

$$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A} \Rightarrow A \subset B$$

(a) *On montre que $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$?*
On suppose que $A \subset B$ et on montre que $A \cap B = A$. Pour cela, on doit montrer les deux inclusions $A \cap B \subset A$ et $A \subset A \cap B$

- *$A \cap B \subset A$ est évidente*

- *Soit $x \in A$ alors $x \in B$ car $A \subset B$ donc $(x \in A) \wedge (x \in B)$*
  On obtient alors

  $$x \in A \Rightarrow x \in (A \cap B)$$

  ainsi $A \subset A \cap B$. D'où

  $$A \cap B = A$$

(b) *On montre que $A \cap B = A \Rightarrow A \cup B = B$? On suppose que $A \cap B = A$ et on montre que $A \cup B = B$. Pour cela, on doit montrer les deux inclusions $A \cup B \subset B$ et $B \subset A \cup B$*

- *$B \subset A \cup B$ est évidente.*
- *Soit $x \in A \cup B$. Deux cas se présentent.*
  Si $x \in B$, on a alors $A \cup B \subset B$
  Si $x \in A$ alors $x \in A \cap B$ et donc $x \in B$ et par suite $A \cup B \subset B$.

D'où $A \cup B = B$

(c) *On montre que $A \cup B = B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.*
On suppose que $A \cup B = B$ et on montre que $\overline{B} \subset \overline{A}$.

$$\begin{array}{rcl} x \in \overline{B} & \Leftrightarrow & x \notin B \\ & \Leftrightarrow & x \notin (A \cup B) \ (A \cup B = B) \\ & \Leftrightarrow & (x \notin A) \wedge (x \notin B) \ (Lois\ de\ Morgan) \\ & \Rightarrow & x \notin A \end{array}$$

d'où $\overline{B} \subset \overline{A}$

(d) *On termine par démontrer $\overline{B} \subset \overline{A} \Rightarrow A \subset B$?*
On suppose que vraie $\overline{B} \subset \overline{A}$ et on montre $A \subset B$.

$$\begin{array}{rcl} \overline{B} \subset \overline{A} & \Leftrightarrow & \forall x, x \in \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \\ & \Leftrightarrow & \forall x, x \notin \overline{A} \Rightarrow x \notin \overline{B} \ (contraposée) \\ & \Leftrightarrow & \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B \end{array}$$

on vient de montrer que $\overline{B} \subset \overline{A} \Leftrightarrow A \subset B$

Corrigé 2.1.3. *1.*

$$\begin{array}{rcl} x \in A & \Rightarrow & x \in A \cup B \\ & \Rightarrow & x \in A \cap B \\ & \Rightarrow & x \in B \end{array}$$

d'où $A \subset B$

$$\begin{array}{rcl} x \in B & \Rightarrow & x \in A \cup B \\ & \Rightarrow & x \in A \cap B \\ & \Rightarrow & x \in A \end{array}$$

d'où $B \subset A$
On conclut alors que si $A \cup B = A \cap B$ alors $A = B$.

2.

$$\begin{array}{rcl} x \in B & \Rightarrow & x \in A \cup B \\ & \Rightarrow & x \in A \cup C \end{array}$$

Deux cas se présentent.
Si $x \in C$ alors on a $B \subset C$.

Si $x \in A$ *alors* $x \in A \cap B$ *par suite* $x \in A \cap C$ *et donc* $x \in C$ *alors là aussi on a* $B \subset C$.

2.2 Applications

Définition 2.2.1. *On appelle une application d'un ensemble* E *dans un ensemble* F *toute correspondance f permettant d'associer à tout élément* $x \in E$ *un seul élément* $y \in F$.
E *est dit ensemble de départ ;* F *ensemble d'arrivée. On note l'élément* y *de* F *associé à un élément* x *de* E *par* $y = f(x)$.
$y = f(x)$ *est appelé l'image de* x *et* x *est un antécédant de* y. *On écrit :*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & E & \longrightarrow & F \\ & & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

Formellement, une correspondance f entre deux ensembles non vides est une application si et seulement si :

$$\forall x_1,\ x_2 \in E,\ (x_1 = x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2))$$

Exemple 2.2.1. *L'application*

$$\begin{array}{rcccl} Id_E & : & E & \longrightarrow & E \\ & & x & \longmapsto & y = x \end{array}$$

est appelée application identité sur E.

Exemple 2.2.2. *Soient E et F deux ensembles non vides et a un élément de F, alors la correspondance f de E dans F définie par :*

$$\forall x \in E, f(x) = a$$

est une application dite application constante.

Exemple 2.2.3. *La correspondance*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

n'est pas une application car l'élément 0 *n'a pas d'image dans* $\mathbb{R}$.

Définition 2.2.2. *On dit que deux applications f et g sont égales si :*

1. *Elles ont un même ensemble de départ E et un même ensemble d'arrivée F.*
2. $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

2.2.1 Composition d'applications

Définition 2.2.3. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On appelle la composée des applications f et g, l'application notée $g \circ f$ définie de E dans G par*

$$\forall x \in E,\ g \circ f(x) = g(f(x))$$

Exemple 2.2.4. *Etant données les applications suivantes*
$\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ *et* $\begin{array}{cccc} g : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ *On a alors*
$\begin{array}{cccc} g \circ f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x| \end{array}$ *et* $\begin{array}{cccc} f \circ g : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$
Il est clair que $g \circ f \neq f \circ g$.

Proposition 2.2.1. *Soient E, F, G et H quatre ensembles. Pour toutes applications $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$, on a :*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Preuve. On remarque tout d'abord que les relations $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ ont le même ensemble de départ E et d'arrivée H. Comparons leurs valeurs. Soit $x \in E$, posons $f(x) = y \in F$, $g(y) = z \in G$ et $h(z) = t \in H$. Alors il vient :
$h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x))) = h(g(y)) = h(z) = t$
et
$(h \circ g) \circ f(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(y) = h(g(y)) = h(z) = t$
Il en résulte l'égalité des composées $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. □

2.2.2 Image directe et Image réciproque

a)- Image directe

Définition 2.2.4. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et $A \subseteq E$. On appelle image directe de A par f (ou, plus simplement, image de A par f), noté $f(A)$, le sous-ensemble de F contenant l'image des éléments de A par f :*

$$f(A) = \{f(x) \in F,\ x \in A\}$$

Formellement on a

$$\forall y \in F, (y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists x \in A,\ y = f(x))$$

Exemple 2.2.5. *On considère l'application*

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & 2 - x \end{array}$$

$f(\left[0, \frac{1}{2}\right]) = \{f(x) \in \mathbb{R},\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\}$
On a

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} & \Longrightarrow & -\frac{1}{2} \leq -x \leq 0 \\ & \Longrightarrow & \frac{3}{2} \leq 2 - x \leq 2 \end{array}$$

d'où

$$f(\left[0, \frac{1}{2}\right]) = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

b)- Image réciproque

Définition 2.2.5. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et $B \subseteq F$. On appelle image réciproque de B par f, noté $f^{-1}(B)$, le sous-ensemble de E contenant les antécédents des éléments de B par f :*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}$$

Formellement on a

$$\forall x \in E, x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B$$

Exemple 2.2.6. *On considère l'application*

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f(x) = (x - 1)^2 \end{array}$$

- $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\} = \{1\}$
- $f^{-1}(]\,0, \frac{1}{2}\,[) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in \,]\,0, \frac{1}{2}\,[\}$
  La résolution de l'inéquation $0 < (x-1)^2 < \frac{1}{2}$ *donne*

$$f^{-1}(]\,0, \frac{1}{2}\,[) = \,]\,\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, 1\,[\,\cup\,]\,1, \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\,[$$

Proposition 2.2.2. *Soient* $f : E \longrightarrow F$ *une application,* $A, B \subset E$ *et* $M, N \subset F$*. On a*

1. $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
4. $M \subset N \Longrightarrow f^{-1}(M) \subset f^{-1}(N)$
5. $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$
6. $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$

Preuve. 1. On suppose que $A \subset B$ et on montre que $f(A) \subset f(B)$.
Soit $y \in F$, alors

$$\begin{array}{rcl} y \in f(A) & \Longleftrightarrow & \exists x \in A,\ y = f(x) \\ & \Longrightarrow & \exists x \in B,\ y = f(x) \\ & \Longrightarrow & y \in f(B) \end{array}$$

d'où $f(A) \subset f(B)$.

2. Soit $y \in F$, alors

$$\begin{array}{rcl} y \in f(A \cup B) & \Longleftrightarrow & \exists x \in A \cup B,\ y = f(x) \\ & \Longleftrightarrow & \exists x, ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y = f(x)) \\ & \Longleftrightarrow & \exists x, \big[\ ((x \in A) \wedge (y = f(x))) \vee ((x \in B) \wedge (y = f(x)))\ \big] \\ & \Longleftrightarrow & \big[\ \exists x, (x \in A) \wedge (y = f(x))\ \big] \vee \big[\ \exists x, (x \in B) \wedge (y = f(x))\ \big] \\ & \Longleftrightarrow & (y \in f(A)) \vee (y \in f(B)) \\ & \Longleftrightarrow & y \in f(A) \cup f(B) \end{array}$$

d'où $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

3. Soit $y \in F$, alors
$$\begin{aligned}
y \in f(A \cap B) &\iff \exists x \in A \cap B,\ y = f(x)\\
&\iff \exists x, ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (y = f(x))\\
&\iff \exists x, \big[\ ((x \in A) \wedge (y = f(x))) \wedge ((x \in B) \wedge (y = f(x)))\ \big]\\
&\iff \big[\ \exists x, (x \in A) \wedge (y = f(x))\ \big] \wedge \big[\ \exists x, (x \in B) \wedge (y = f(x))\ \big]\\
&\implies (y \in f(A)) \wedge (y \in f(B))\\
&\iff y \in f(A) \cap f(B)
\end{aligned}$$
d'où $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
Autre méthode : On a $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ donc par la propriété (1), on a immédiatement : $f(A \cap B) \subset f(A)$ et $f(A \cap B) \subset f(B)$
d'où
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

4. On suppose que $M \subset N$ et on montre que $f^{-1}(M) \subset f^{-1}(N)$.
Soit $x \in E$
$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(M) &\iff f(x) \in M\\
&\implies f(x) \in N\\
&\iff x \in f^{-1}(N)
\end{aligned}$$
d'où $f^{-1}(M) \subset f^{-1}(N)$

5. Soit $x \in E$
$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(M \cup N) &\iff f(x) \in M \cup N\\
&\iff (f(x) \in M) \vee (f(x) \in N)\\
&\iff (x \in f^{-1}(M)) \vee (x \in f^{-1}(N))\\
&\iff x \in f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)
\end{aligned}$$
d'où $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$

6. Soit $x \in E$
$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(M \cap N) &\iff f(x) \in M \cap N\\
&\iff (f(x) \in M) \wedge (f(x) \in N)\\
&\iff (x \in f^{-1}(M)) \wedge (x \in f^{-1}(N))\\
&\iff x \in f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)
\end{aligned}$$
d'où $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$

$\square$

2.2.3 Injection, Surjection, Bijection

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

a)- Injection :

Définition 2.2.6. *L'application f est dite injective (ou f est une injection) si et seulement si :*

$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$$

ou bien en prenant la contraposée de l'implication,

$$\forall x, x' \in E, x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x'),$$

c'est-à-dire que f est injective si et seulement si tout élément y de F a ***au plus*** *un antécédent.*

Exemple 2.2.7. *On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 1$$

f est-elle injective ?
Soient deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\iff 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \\ &\iff 2x_1 = 2x_2 \\ &\iff x_1 = x_2 \end{aligned}$$

On vient de montrer que

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Ainsi f est injective.

b)- Surjection :

Définition 2.2.7. *L'application f est dite surjective (on dit encore que f est une surjection) si et seulement si :*

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x),$$

c'est-à-dire que f est surjective si et seulement si tout élément y de F a au moins un antécédent dans E.

Remarque 2.2.1. *L'application f est surjective si et seulement si l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution x de E pour tout élément y de F.*

Exemple 2.2.8. *On reprend l'exemple 2.2.7. f est-elle surjective ?*
Soit $y \in \mathbb{R}$, essayons de résoudre l'équation $y = f(x)$.

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = 2x+1 \\ &\iff y-1 = 2x \\ &\iff x = \tfrac{y-1}{2} \end{aligned}$$

Il est clair que l'expression $\frac{y-1}{2}$ est définie pour tout réel y. Ainsi f est surjective.

c)- Bijection :

Définition 2.2.8. *L'application f est dite bijective (ou f est une bijection) si et seulement si elle est à la fois surjective et injective.*

Proposition 2.2.3. *L'application f est bijective si et seulement si tout élément y de F possède un unique antécédent x par f dans E :*

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ y = f(x)$$

Preuve. Si f est bijective, alors f est surjective. Par conséquent, tout élément y appartenant à F admet au moins un antécédent x par f dans E. Supposons maintenant que y ait deux antécédents x_1 et x_2. On a alors $y = f(x_1) = f(x_2)$, d'où $x_1 = x_2$ puisque f est injective. On en déduit que y admet un seul antécédent.
Réciproquement, si tout y de F admet un unique antécédent x par f dans E, alors f est surjective de E dans F. Soient x_1, x_1 de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Posons $y = f(x_1) = f(x_2)$, alors x_1 et x_2 sont deux antécédents de y. Par unicité de l'antécédent, on a $x_1 = x_2$, ce qui prouve l'injectivité de f. L'application f est donc bijective de E dans F. □

Lorsqu'une application est bijective, il est possible d'introduire la notion d'application réciproque.

Définition 2.2.9. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective de E dans F. On définit alors une application de F vers E en associant à tout élément y de F son seul antécédent. Cette application, appelée application réciproque de f et notée f^{-1}, vérifie donc :*

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

ou encore

$$\begin{array}{cccc} f & : & E & \longrightarrow & F \\ & & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{cccc} f^{-1} & : & F & \longrightarrow & E \\ & & y & \longmapsto & x = f^{-1}(y) \end{array}$$

Exemple 2.2.9.
1. *Si E est un ensemble, Id_E est bijective et $Id_E^{-1} = Id_E$*
2. *L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = e^x$ est bijective et sa bijection réciproque est $f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f^{-1}(y) = ln(y)$.*
3. *En considérant l'application f de l'exemple 2.2.7. On avait montré précedement qu'elle est injective et surjective donc c'est une bijection. Son application réciproque est*

$$\begin{array}{cccc} f^{-1} & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \end{array}$$

Proposition 2.2.4. *Soientt E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.*

1. *L'application f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$.*
2. *Si f est bijective alors l'application g est unique et elle aussi est bijective. L'application g s'appelle la bijection réciproque de f et est notée f^{-1} . De plus $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Preuve.

1. - (Nécessité $\Longrightarrow$) Supposons f bijective. Nous allons construire une application $g : F \longrightarrow E$. Comme f est surjective alors pour chaque $y \in F$, il existe un $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et on pose $g(y) = x$. On a $f(g(y)) = f(x) = y$, ceci pour tout $y \in F$ et donc $f \circ g = id_F$. On compose à droite avec f donc $f \circ g \circ f = id_F \circ f$. Alors pour tout $x \in E$ on a $f((g \circ f)(x)) = f(x)$ or f est injective et donc $g \circ f(x) = x$. Ainsi $g \circ f = id_E$. Ainsi : $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$.
   - (Suffisance $\Longleftarrow$) Supposons que g existe et montrons que f est bijective.
     - f est surjective : en effet soit $y \in F$ alors on note $x = g(y) \in E$; on a bien : $f(x) = f(g(y)) = f \circ g(y) = id_F(y) = y$, donc f est bien surjective.
     - f est injective : soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On compose par g (à gauche) alors $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ donc $id_E(x_1) = id_E(x_2)$ donc $x_1 = x_2$; f est bien injective.
2. - Si f est bijective alors g est aussi bijective car $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$ et on applique ce que l'on vient de démontrer avec g à la place de f . Ainsi $g^{-1} = f$.
   - Si f est bijective, g est unique : en effet soit $h : F \longrightarrow E$ une autre application telle que $h \circ f = id_E$ et $f \circ h = id_F$; en particulier $f \circ h = id_F = f \circ g$, donc pour tout $y \in F$, $f(h(y)) = f(g(y))$ or f est injective alors $h(y) = g(y)$, ceci pour tout $y \in F$; d'où $h = g$.

□

Proposition 2.2.5. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications bijectives. L'application $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Preuve. D'après la proposition 2.2.4, il existe $u : F \longrightarrow E$ tel que $u \circ f = id_E$ et $f \circ u = id_F$. Il existe aussi $v : G \longrightarrow F$ tel que $v \circ g = id_F$ et $g \circ v = id_G$. On a alors $(g \circ f) \circ (u \circ v) = g \circ (f \circ u) \circ v = g \circ id_F \circ v = g \circ v = id_G$. Et $(u \circ v) \circ (g \circ f) = u \circ (v \circ g) \circ f = u \circ id_F \circ f = u \circ f = id_E$. Donc $g \circ f$ est bijective et son inverse est $u \circ v$. Comme u est la bijection réciproque de f et v celle de g alors : $u \circ v = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

Proposition 2.2.6. *Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.*

1. *Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.*
2. *Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.*

Preuve. 1. On a $g \circ f : E \longrightarrow G$. Supposons que f et g sont injectives et montrons que $g \circ f$ est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$

$$\begin{aligned} g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) &\Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Longrightarrow f(x_1) = f(x_2) \text{ (g est injective)} \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \text{ (f est injective)} \end{aligned}$$

ce qui montre que $g \circ f$ est injective.

2. Supposons que f et g sont surjectives et montrons que $g \circ f$ est surjective.
   Soit $z \in G$, puisque g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$, comme $y \in F$ et f est surjective alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $z = g(f(x))$ et on déduit que :

$$\forall z \in G, \exists x \in E, z = g \circ f(x)$$

   ce qui montre que $g \circ f$ est surjective.

□

Proposition 2.2.7. *Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.*

1. *Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.*
2. *Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*

Preuve. 1. Supposons que $g \circ f$ est injective et montrons que f est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$, alors

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\implies g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \text{ (g est une application)} \\ &\implies g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \\ &\implies x_1 = x_2 \ (g \circ f \text{ est injective}) \end{aligned}$$

ce qui montre que f est injective.

2. Supposons que $g \circ f$ est surjective et montrons que g est surjective. Soit $z \in G$, alors il existe $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Ainsi il existe $y = f(x) \in F$ tel que $z = g(y)$.
   Donc
   $$\forall z \in G, \exists y \in F, z = g(y)$$
   Ceci montre que g est surjective.

□

2.2.4 Exercices

Exercice 2.2.1.

1. *Soit l'application* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^2$ *et* $A = [-1, 4]$. *Déterminer*

   (a) *L'image directe de* A *par f.*

   (b) *L'image réciproque de* A *par f.*

2. *Quelle est l'image directe des ensembles* $\mathbb{R}$, $[0, 2\pi]$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *et l'image réciproque des ensembles* $[0, 1]$, $[3, 4]$, $[1, 2]$ *par l'application* $x \longmapsto \sin(x)$ *?*

Exercice 2.2.2. *Soit l'application* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = x^2 + 1$. *Considérons les ensembles* $A = [-3, 2]$, $B = [0, 4]$

- *Comparer les ensembles* $f(A \cap B)$ *et* $f(A) \cap f(B)$

- *Quelle condition doit vérifier f pour que* $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Exercice 2.2.3. *Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et l'application $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour toutes parties disjointes de E, on ait*

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B)$$

1. *Montrer que $f(\varnothing) = 0$*
2. *Montrer que pour toutes parties A, B de E, on a*

$$f(A \cup B) + f(A \cap B) = f(A) + f(B)$$

Exercice 2.2.4.

1. *Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < 0 \\ 1 + x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

   (a) *Déterminer les ensembles suivants $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{-1\})$, $f^{-1}([1, 2])$*

   (b) *f est-elle injective ? f est-elle surjective ?*

2. *Soit l'application $g : \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ telle que*

$$g(x) = \frac{9}{2x - 1}$$

   Montrer que g est une bijection. Déterminer son application réciproque. Déterminer $g^{-1}([-5, 2])$

Exercice 2.2.5. *Etudier l'injectivité et la surjectivité de l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par*

$$f(x, y) = (x + y, xy)$$

Corrigés

Corrigé 2.2.1.

1. **(a)** *On a :*

$$f(A) = f([-1,4]) = \{f(x) \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 4\}$$

or

$$[-1,4] = [-1,0] \cup [0,4]$$

alors

$$f([-1,4]) = f([-1,0]) \cup f([0,4])$$

Il est clair que

$$-1 \leq x \leq 0 \Longrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$$

et

$$0 \leq x \leq 4 \Longrightarrow 0 \leq x^2 \leq 16$$

Ainsi

$$f([-1,4]) = [0,1] \cup [0,16] = [0,16]$$

(b) *On a*

$$f^{-1}([-1,4]) = f^{-1}([-1,0]) \cup f^{-1}([0,4])$$

or

$$f^{-1}([-1,0]) = \{x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 0\} = \{0\}$$

et

$$f^{-1}([0,4]) = \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 4\}$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x) \leq 4 &\iff 0 \leq x^2 \leq 4 \\ &\iff 0 \leq |x| \leq 2 \\ &\iff -2 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

Ainsi $f^{-1}([0,4]) = [-2,2]$

D'où $f^{-1}([-1,4]) = \{0\} \cup [-2,2] = [-2,2]$

2. *On pose* $g(x) = \sin(x)$

   - $g(\mathbb{R}) = \{\sin(x), x \in \mathbb{R}\} = [-1,1]$
   - $g([0,2\pi]) = \{\sin(x), x \in [0,2\pi]\} = [-1,1]$

- $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left\{\sin(x), x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\} = [0, 1]$
- $g^{-1}([0,1]) = \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq \sin(x) \leq 1\} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, 2k\pi + \pi]$
- $g^{-1}([3,4]) = \{x \in \mathbb{R}, 3 \leq \sin(x) \leq 4\} = \varnothing$
- $g^{-1}([1,2]) = \{x \in \mathbb{R}, 1 \leq \sin(x) \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R}, \sin(x) = 1\} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Corrigé 2.2.2. - *D'un côté, on a*

$$A \cap B = [-3, 2] \cap [0, 4] = [0, 2]$$

alors

$$f(A \cap B) = f([0,2]) = \{x^2 + 1, 0 \leq x \leq 2\} = [1, 5]$$

d'un autre côté, on a

$$f(A) = f([-3,2]) = f([-3,0]) \cup f([0,2]) = [1,10] \cup [1,5] = [1,10]$$

et

$$f(B) = f([0,4]) = [1, 17]$$

Il est clair que

$$f(A) \cap f(B) \not\subseteq f(A \cap B)$$

- *A quelle condition on a $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$?*

$$\begin{aligned} y \in f(A) \cap f(B) &\iff y \in f(A) \wedge y \in f(B) \\ &\implies (\exists x_1 \in A, y = f(x_1)) \wedge (\exists x_2 \in B, y = f(x_2)) \end{aligned}$$

Si f est injective, alors $x_1 = x_2$ et par suite on a

$$\exists x \in A \cap B,\ y = f(x)$$

d'où $y \in f(A \cap B)$.

Corrigé 2.2.3. *1. On a $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$ alors par définition de f*

$$f(\varnothing) = f(\varnothing \cup \varnothing) = f(\varnothing) + f(\varnothing)$$

d'où $f(\varnothing) = 0$

2. *On a* $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ *et* $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$
alors
$f(A \cup B) = f(A \cup (B \setminus A)) = f(A) + f(B \setminus A)$
et
$f(B) = f(A \cap B) + f(B \setminus A)$
Il s'ensuit alors
$f(A \cup B) + f(A \cap B) = f(A) + f(B \setminus A) + f(B) - f(B \setminus A) = f(A) + f(B)$

Corrigé 2.2.4. *1.* **(a)**

- $f(\mathbb{R}) = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$
comme $\mathbb{R} = \mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}^+$ *alors* $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_-^*) \cup f(\mathbb{R}^+)$
- $f(\mathbb{R}_-^*) = \{1\}$
- $f(\mathbb{R}^+) = \{x+1,\ x \geq 0\} = [\,1, +\infty\,[$
ce qui donne $f(\mathbb{R}) = [\,1, +\infty\,[$
- $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\}$
Il suffit alors de résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- *Sur* $\mathbb{R}_-^*$, $f(x) = 0$ *n'admet pas de solution .*
- *Sur* $\mathbb{R}^+$, $f(x) = 0 \Longrightarrow x = -1 \notin \mathbb{R}^+$
d'où
$$\nexists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$$
On déduit alors
$$f^{-1}(\{0\}) = \varnothing$$
- $f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1\}$
- $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) = 1$
- *Pour* $x \in \mathbb{R}^+, x + 1 = 1 \Longrightarrow x = 0$
on obtient alors
$$f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}_-^* \cup \{0\} = \mathbb{R}^-$$
- $f^{-1}(\{-1\}) = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = -1\}$
- $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ f(x) = 1 \neq -1$
- *Pour* $x \in \mathbb{R}^+,\ x + 1 = -1 \Longrightarrow x = -2 \notin \mathbb{R}^+$
d'où
$$\nexists x \in \mathbb{R},\ f(x) = -1$$

On déduit alors

$$f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$$

- $f^{-1}([1,2]) = f^{-1}(\{1\}) \cup f^{-1}(]\,1,2\,])$
  - $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}^-$ *(déjà calculé)*
  - $f^{-1}(]\,1,2\,]) = \{x \in \mathbb{R}, 1 < f(x) \leq 2\}$

  Il est clair qu'il n'existe pas de réels négatif ayant une image positive. Pour $x \in \mathbb{R}^+$,

  $$1 < x+1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$$

  Ainsi

  $$f^{-1}(]\,1,2\,]) = \,]\,0,1\,]$$

  d'où

  $$f^{-1}([1,2]) = \mathbb{R}^- \cup \,]\,0,1\,] = \,]-\infty,1\,]$$

(b) - *f n'est pas injective car* $f(-4) = f(-3) = 1$
- *f n'est pas surjective car par exemple 0 et -1 n'ont pas d'antécédents. En général, tous les éléments de l'intervalle* $]-\infty,1\,[$ *n'ont pas d'antécédents par l'application* f.

2. *g est bijective si et seulement si g est injective et surjective.*

- *Soient* $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$

  $$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_1) &\Longrightarrow \tfrac{9}{2x_1-1} = \tfrac{9}{2x_1-1} \\ &\Longrightarrow 2x_1+1 = 2x_2+1 \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

  Ainsi on a montré que g est injective.

- *Soit* $y \in \mathbb{R}^*$, *cherchons un* $x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$ *tel que* $y = g(x)$ *?*

  $$\begin{aligned} y = g(x) &\Longrightarrow y = \tfrac{9}{2x-1} \\ &\Longrightarrow y(2x-1) = 9 \quad \textit{comme}\ y \neq 0\ \textit{alors}\ \tfrac{9+y}{2y}\ \textit{est} \\ &\Longrightarrow x = \tfrac{9+y}{2y} \end{aligned}$$

  bien défini. On doit montrer que $\frac{9+y}{2y} \neq \frac{1}{2}$ *? On raisonne* *par l'absurde, c-à-d on suppose que* $\frac{9+y}{2y} = \frac{1}{2}$, *alors* $9 = 0$ *ce qui est impossible. On déduit alors*

$$\forall y \in \mathbb{R}^*, \ \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}, \ y = g(x),$$

ce qui montre que g *est surjective. Ainsi, on vient de montrer que* g *est bijective.*

- *Son application réciproque est*

$$\begin{array}{rcccl} g^{-1} & : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \\ & & x & \longmapsto & g^{-1}(x) = \frac{9+x}{2x} = \frac{9}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \end{array}$$

- $g^{-1}([-5,2]) = g^{-1}([-5,0\,[) \cup g^{-1}(]\,0,2])$

\- $-5 \leq x < 0 \Longrightarrow \frac{9}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \leq \frac{-2}{5}$
\- $0 < x \leq 2 \Longrightarrow \frac{11}{4} \leq \frac{9}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}$
Ainsi

$$g^{-1}([-5,2]) = \,]-\infty, \frac{-2}{5}\,] \cup [\,\frac{11}{4}, +\infty\,[$$

Corrigé 2.2.5. • f *n'est pas injective car* $\exists (1,4), (4,1) \in \mathbb{R}^2$ *tels que*

$$f(1,4) = f(4,1) = (5,4) \ \textit{et} \ (1,4) \neq (4,1)$$

- *Pour que* f *soit surjective, il faut que*

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \ \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x,y) = (a,b)$$

$$f(x,y) = (a,b) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & a \\ xy & = & b \end{array} \right.$$

or x *et* y *sont solutions de l'équation* $x^2 - ax + b = 0$ *si et seulement si* $a^2 - 4b \geq 0$
Pour $(a,b) = (2,3)$, *on a* $a^2 - 4b = -8 < 0$ *alors le système* $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ xy & = & 3 \end{array} \right.$ *n'admet pas de solutions dans* $\mathbb{R}^2$. *Ce qui montre que* f *n'est pas surjective.*