أولا : التوزيع التكراري للمتغير الكمي المنفصل (المنقطع)

1- التوزيع التكراري المطلق والنسبي وتمثيلهما البياني:

<u>التوزيع التكراري المطلق</u>: هو عبارةعن جدول يحتوي في صورته البسيطة على:

- العمود الأول: يمثل مختلف القيم التي يأخذها المتغير الاحصائي المدروس مرتبة ترتيبا تصاعديا ونرمز له بـ x_i.
- العمود الثاني: تسجل فيه عدد المرات التي تكررت فيها قيم المتغير و نرمز له بـ n_i

مثال 1: البيانات التالية تمثل عدد الغرف في المسكن الواحد لعينة مكونة من 25 مسكن بمدينة خميس مليانة .

3	4	2	5	3
7	3	4	2	2
5	3	7	4	3
6	4	2	5	4
1	5	3	4	2

المطلوب: انشاء الجدول التكراري

الحل:

عدد الغرف x_i (قيم المتغير)	التكرارات المطلقة n_i (عدد المساكن لكل قيمة)	التكرارات النسبية f_i
1	1	0,04
2	5	0,2
3	6	0,24
4	6	0,24
5	4	0,16
6	1	0,04
7	2	0,08
المجموع	25	1

$n_2 = 5$: هناك 5 مساكن من بين 25 عدد الغرف بها = 2

$n_4 = 6$: هناك 6 مساكن من بين 25 عدد الغرف بها = 4

ملاحظة: مجموع التكرارات يساوي دائما حجم العينة المدروسة:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_r = \sum_{i=1}^{i=r} n_i = n$$

التوزيع التكراري النسبي: هو عبارة عن حاصل قسمة التكرار المطلق لكل قيمة منقيم المتغير على مجموع التكرارات (حجم العينة) و نرمز له بـ f_i حيث:

$$f_i = \frac{n_i}{n} \quad \text{أو} \quad f_i = \frac{n_i}{\sum n_i}$$

بالعودة للمثال 1 نحسب التكرارات النسبية:

$f_2 = \frac{5}{25} = 0{,}2$ معناه 20 % من المساكن عدد الغرف فيها 2

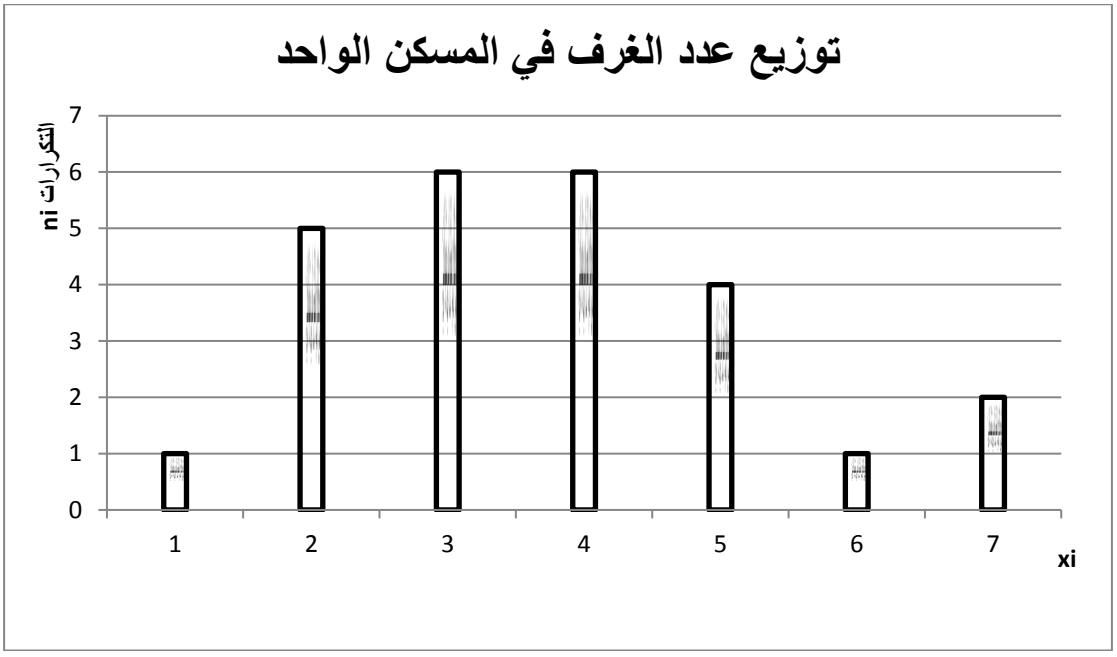
$f_4 = 0{,}24$ معناه 24% من المساكن عدد الغرف فيها 4

أما التكرار النسبي المئوي $f_{i\,\%}$ فهو التكرار النسبي مضروبا في 100

$$f_{i\,\%} = f_i \times 100 \quad \text{أو} \quad f_{i\,\%} = \frac{n_i}{\sum n_i} \times 100$$

التمثيل البياني للتوزيع التكراري المطلق و النسبي: ان التمثيل البياني المناسب في حاله المتغير الكمي المنفصل هو التمثيل بالأعمدة البيانية، حيث أن طول كل عمود يتناسب مع التكرارالنسبي أو المطلق الموافق له.

التمثيل البياني للمثال 1:



2- التكرار المجمع الصاعد و النازل والتمثيل البياني الموافق لهما:

أ- التوزيع التكراري للمجمع الصاعد:

التكرار التجميعي الصاعد $N_i \uparrow$ في نقطة معينة k يحسب كما يلي:

$$N_{\mathrm{k}}^{\uparrow} = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = \sum_{i=1}^{i=k} n_i$$

حيث :

$$N_1^{\uparrow} = n_1$$
$$N_2^{\uparrow} = n_1 + \mathrm{n}_2 \Rightarrow N_2^{\uparrow} = N_1^{\uparrow} + n_2$$

$$N_3^{\uparrow} = n_1 + \mathrm{n}_2 + n_3 \Rightarrow N_3^{\uparrow} = N_2^{\uparrow} + n_3$$

عند التعميم نتحصل على :

$$N_{\mathrm{k}}^{\uparrow} = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = N_{\mathrm{k}-1}^{\uparrow} + n_k$$

أما التكرار المجمع الصاعد النسبي في نقطة معينة k يساوي الى :

$$F_{\mathrm{k}}^{\uparrow} = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_k = \sum_{i=1}^{i=k} f_i$$

ب-التوزيع التكراري للمجمع النازل :

التكرار المجمع النازل في نقطة معينة k يحسب كالتالي :

$$N_1^{\downarrow} = n$$
$$N_2^{\downarrow} = n - n_1 = N_1^{\downarrow} - n_1$$
$$N_3^{\downarrow} = n - n_1 - n_2 = N_2^{\downarrow} - n_2$$

بالتعميم و عند أي نقطة k نتحصل على مايلي :

$$N_k^{\downarrow} = n - n_1 - \cdots - n_{k-1} = N_{k-1}^{\downarrow} - n_{k-1}$$

أما عن حساب التكرار المجمج النسبي النازل فبنفس الفكرة نتحصل على :

$$F_k^{\downarrow} = 1 - f_1 - f_2 - \cdots - f_{k-1}$$

بالرجوع الى المثال الأول نتحصل على الجدول التالى:

x_i	n_i	f_i	$N_i^{\uparrow}$ ت م ص	$F_i^{\uparrow}$ ت م ص ن	$N_k^{\downarrow}$ ت م ن	$F_k^{\downarrow}$ ت م ن ن
1	1	0,04	1	0,04	25	1
2	5	0,2	6	0,24	24	0,96
3	6	0,24	12	0,48	19	0,76
4	6	0,24	18	0,72	13	0,52
5	4	0,16	22	0,88	7	0,28
6	1	0,04	23	0,92	3	0,12
7	2	0,08	25	1	2	0,08
المجموع	25	1	/	/	/	/

ملاحظة:

- التكرار المجمع الصاعد الأول يساوي دائما القيمة الأولى للتكرار المطلق و ت م ص الأخير يساوي دائما مجموع التكرارات .

- التكرار المجمع النازل الأول يساوي دائما مجموع التكرارات و ت م ص الأخير يساوي دائما القيمة الأخيرة للتكرار المطلق .

التفسير:

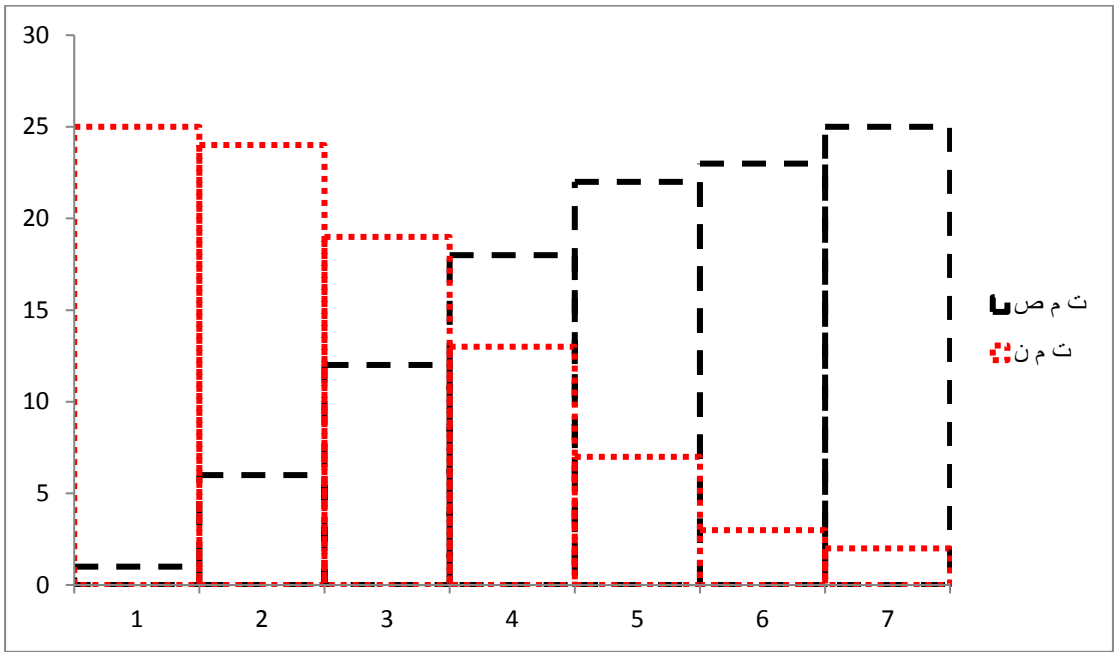
$N_2^{\uparrow} = 6$ معناه هناك 6 مساكن من أصل 25 مسكن عدد الغرف فيها أقل أو يساوي 2

$N_5^{\downarrow} = 7$ معناه هناك 7 مساكن من بين 25 مسكن عدد الغرف فيها أكثر أويساوي 5

$F_2^{\uparrow} = 0{,}24$ معناه هناك 24% من المساكن عدد الغرف فيها أقل أو يساوى 2

$F_5^{\downarrow} = 0{,}28$ معناه 28% من المساكن عدد الغرف فيها أكثر أو يساوي 2

التمثيل البياني للتكرار المجمع الصاعد و النازل:



ملاحظة: عند الرسم نأخذ فقط القمم أي القطعة المستقيمة العلوية.

ثانيا : التوزيع التكراري للمتغير الكمي المستمر (المتصل)

اذا كان المتغير الاحصائي مستمر فانه يقبل عدد غير متناهي من القيم المحصوربين أصغر قيمة X_{min} وأكبر قيمة X_{max} وعليه يستحيل أن نمثله بجدول على شكل قيم فردية، لذلك نلجأ في هذه الحالة الى تجميع هذه البيانات في مجموعات جزئية تسمى فئات،

السؤال المطروح هو ما هو عدد الفئات الترى نختارها و كيف؟

ليست هناك قاعدة نظرية لذلك، وانما يفضل أن لا يكون عدد الفئات كثير جدا (مثلا15 فئة) فيصبح الجدول ضخم يصعب تحليله و قراءته، كما يفضل أن لا يكون عدد الفئات قليل جدا فيصبح الجدول مبسط جدا فيفقد حينه دقة وتفاصيل البيانات.

وضع ستورج (Sturges) قاعدة تجريبية لحساب طول الفئات:

1- تحديد عدد الفئات:

$$K = 1 + 1{,}322 \ln (n)$$

ln هو اللوغاريم النيبيري

K تمثل عدد الفئات

n حجم العينة

2- تحديد أطوال الفئات c:

$$c = \frac{\text{المدى } E}{K}$$

حيث $E = X_{max} - X_{min}$

و k هوعدد الفئات

ملاحظة: من الأحسن تقريب عدد الفئات الى عدد تام.

3- جدول التوزيع التكراري للمتغير الكمي المستمر:

بعد تحديد الفئات يشكل جدول التوزيع التكراري حيث يضم :

- الفئات في العمود الأول
- مراكز الفئات في العمود الثاني : نرمز له بـ C_i حيث يساوي :

$$C_i = \frac{\text{الحدالأدنى للفئة} + \text{الحدالأعلى}}{2}$$

- العمود الثالث التكرارات المطلقة n_i
- العمود الرابع التكرارات النسبية f_i
- العمود الخامس التكرارالمجمع الصاعد $N_i^{\uparrow}$
- العمود السادس التكرارالمجمع النازل $N_i^{\downarrow}$

مثال 2 : البيانات التالية تمثل أوزان 60 طالبا بالكغ في أحد أقسام سنة أولى LMD بكلية العلوم الاقتصادية :

67	64	68	73	73	54	61	74	60	78
80	74	65	63	60	69	72	66	77	65
74	50	76	69	68	66	78	63	70	55
67	67	64	76	61	72	72	57	65	77
59	71	79	78	58	63	74	66	73	67
61	71	69	68	73	81	64	61	84	55

المطلوب : أنشيء جدول التوزيع التكراري و احسب كلا من $f_i\%, f_i$, $N_{\text{i}}^{\uparrow}$, $N_{\text{i}}^{\downarrow}$ و $F_i^{\uparrow}\%, F_i^{\downarrow}\%$ ثم اشرح كل $f_2\%, n_2$, $N_2^{\uparrow}$, $N_5^{\downarrow}$,

الحل :

أول خطوة نقوم بها هي ترتيب البيانات ترتيب تصاعديا :

61	61	61	63	63	63	64	64	64	65
65	65	66	66	66	67	67	67	67	68
68	68	69	69	69	70	71	71	72	72
72	73	73	73	73	74	74	74	74	76
76	77	77	78	78	78	79	80	81	84

لدينا : حسب قاعدة ستورج فان طول الفئات : $c = \frac{E}{K}$

- حساب المدى : $E = X_{max} - X_{min} = 84 - 50 = 34$
- حساب عدد الفئات: $K = 1 + 1{,}322 \ln(n) = 6{,}9 \approx 7$ أي 7 فئات
- حساب طول الفئات : $c = \frac{E}{K} = \frac{34}{7} = 4{,}92 \approx 5$
- أي طول كل فئة يساوي 5 كلغ و منه تكون الفئات كالتالي : [50−55[، [55−60[...

ونقوم بتفريغ البيانات في الفئات فنتحصل على الجدول التالي:

الجدول 2 : توزيع 60 طالبا حسب الوزن بالكلغ

أوزان الطلبة xi	عدد الطلبة ni	C_i	f_i	$f_i\%$	$N_i^{\uparrow}$ ت م ص	$F_i^{\uparrow}$ ت م ص ن	$N_k^{\downarrow}$ ت م ن	$F_k^{\downarrow}$ ت م ن ن
[50، 55[	2	52,5	0,033	3,3	2	0,033	60	1
[55، 60[	5	57,5	0,083	8,3	7	0,117	58	0,967
[60، 65[	12	62,5	0,200	20,0	19	0,317	53	0,883
[65، 70[	16	67,5	0,267	26,7	35	0,583	41	0,683
[70، 75[	14	72,5	0,233	23,3	49	0,817	25	0,417
[75، 80[	8	77,5	0,133	13,3	57	0,950	11	0,183
[80، 85[	3	82,5	0,050	5,0	60	1	3	0,050
المجموع	60	/	1	100	/	/	/	/

الشرح :

$n_2 = 5$ هناك 5طلبة أوزانهم تتراوح بين 55 و60 كلغ

$f_2\% = 8,3$ معناه هناك 8,3% من الطلبة أوزانهم تتراوح ما بين 55 و 60 كلغ $N_2^{\uparrow} = 7$ هناك 7 طلبة من بين 60 طالب أوزانهم أقل من 60 كلغ

$N_5^{\downarrow} = 25$ هناك 25 طالب من بين 60 طالب أوزانهم أكبر من 70 كلغ

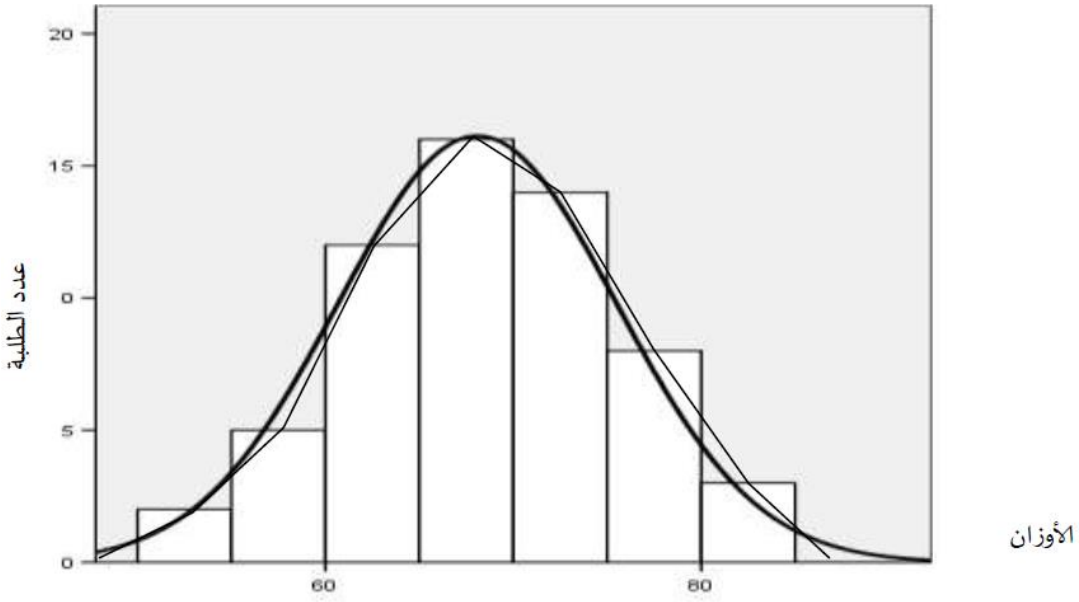
$F_2^{\uparrow}\% = 11,6\%$ هناك 11,6% من الطلبة أوزانهم أقل من 60كلغ

$F_5^{\uparrow}\% = 41,6\%$ هناك 41,6% من الطلبة أوزانهم أكبر أوتساوي 70 كلغ

التمثيل البياني للتكرار المطلق (أو النسبي) للمتغير الكمي المستمر:

- **المدرج التكراري:** يمثل التكرار المطلق (أو النسبي) للمتغير الكمي المستمر بواسطة المدرج التكراري حيث يتناسب طول المستطيل مع التكرار الموافق له ، أما العرض فيبدأ عند الحد الأدنى للفئة وينتهي عند الحد الأقصى للفئة.
- **المضلع التكراري:** اذا ربطنا بين مراكز الفئات (أي وسط القطعة المستقيمة على قمم المستطيلات المحصل عليها) بواسطة قطع مستقيمة فاننا نتحصل على المضلع التكراري.
- **المنحنى التكراري:** أما اذا ربطنا بين مراكزالفئات بواسطة منحنى فاننا نتحصل على منحنى تكراري.

التمثيل البياني:

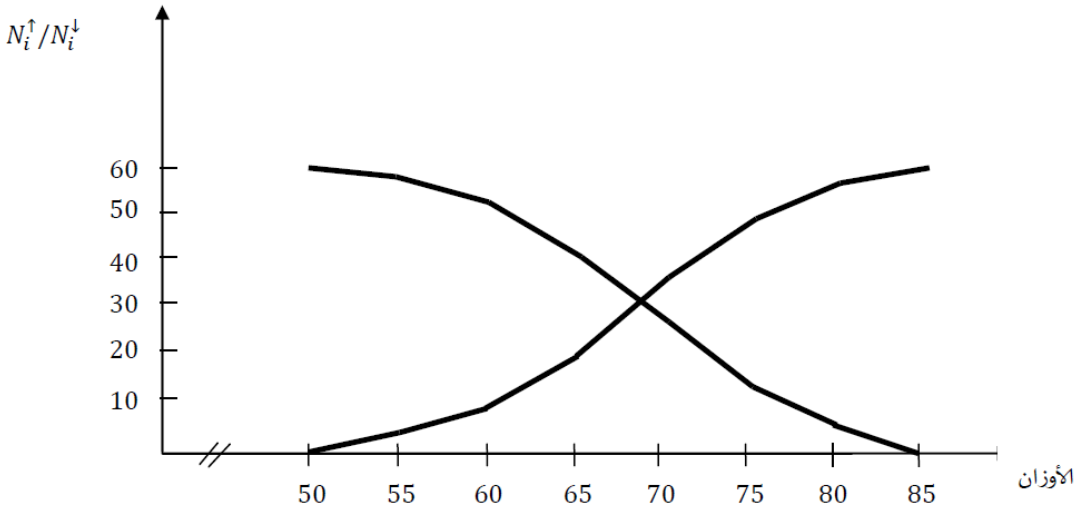


التمثيل البياني للتكرارات المجمعة:

يمثل التكرار المجمع الصاعد والنازل للمتغير الاحصائي المستمر عن طريق المنحنى المجمع الصاعد والنازل

- **المنحنى المجمع الصاعد:** ترفق بكل قيمة للتكرار المجمع الصاعد الحد الأعلى للفئة الموافقة لها.
- **المنحنى المجمع النازل:** ترفق بكل قيمة للتكرار المجمع النازل الحد الأدنى للفئة الموافقة لها.

التمثيل البياني للتكرار المجمع الصاعد والنازل للمثال السابق:



ملاحظة: فاصلة نقطة التقاطع تمثل قيمة الوسيط

التمثيل البياني للمتغير الكمي المستمر في حالة عدم تساوي أطوال الفئات (تعديل التكرارات):

إذا كانت الفئات غير متساوية الطول فإننا نقوم بتعديل التكرارات لأن قاعدة المقارنة غير ثابتة حتى يكون هناك تناسب بين طول الفئة والتكرارات المناسبة لها.

- التكرار المعدل عبارة عن النسبة بين التكرار البسيط وطول الفئة المقابلة له مضروبا في طول الفئة الأقل طولا

$$n'_i = \frac{n_i}{k_i} \times k_0$$

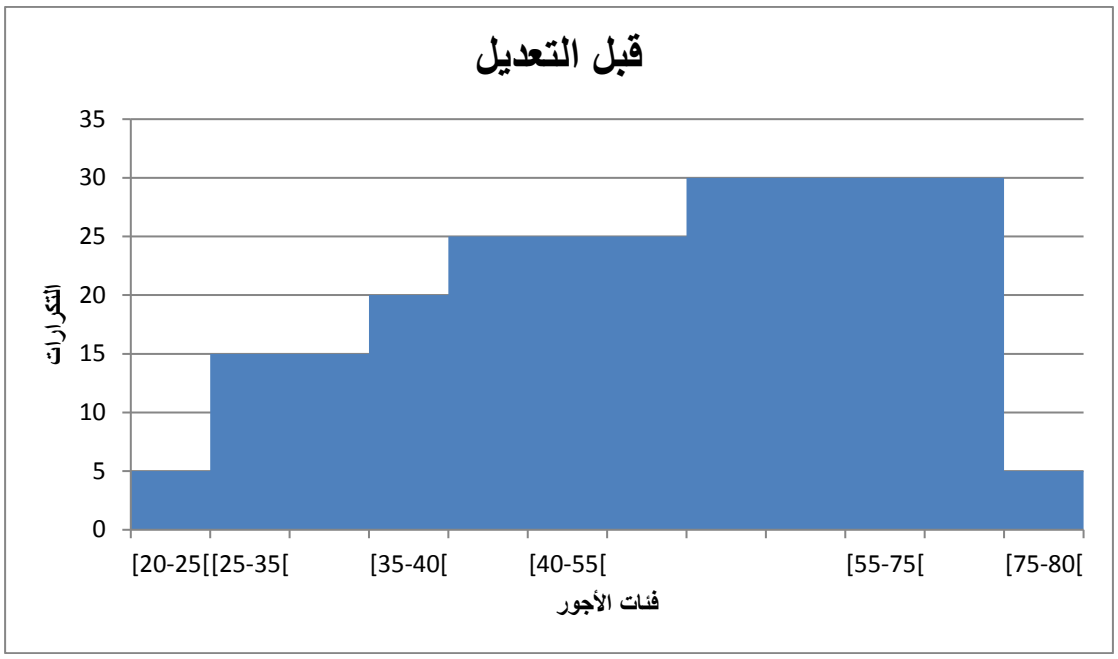
حيث:

- n'_i : هو التكرار المعدل الجديد للفئة i
- n_i : هو التكرار الأصلي للفئة i
- k_0 أدنى طول فئة
- k_i: طول الفئة i

مثال3: يمثل الجدول التالي توزيع 100 عامل حسب الأجر اليومي

فئات الأجور	التكرار n_i
]20−25]	5
]25−35]	15
]35−40]	20
]40−55]	25
]55−75]	30
]75−80]	5
المجموع	100

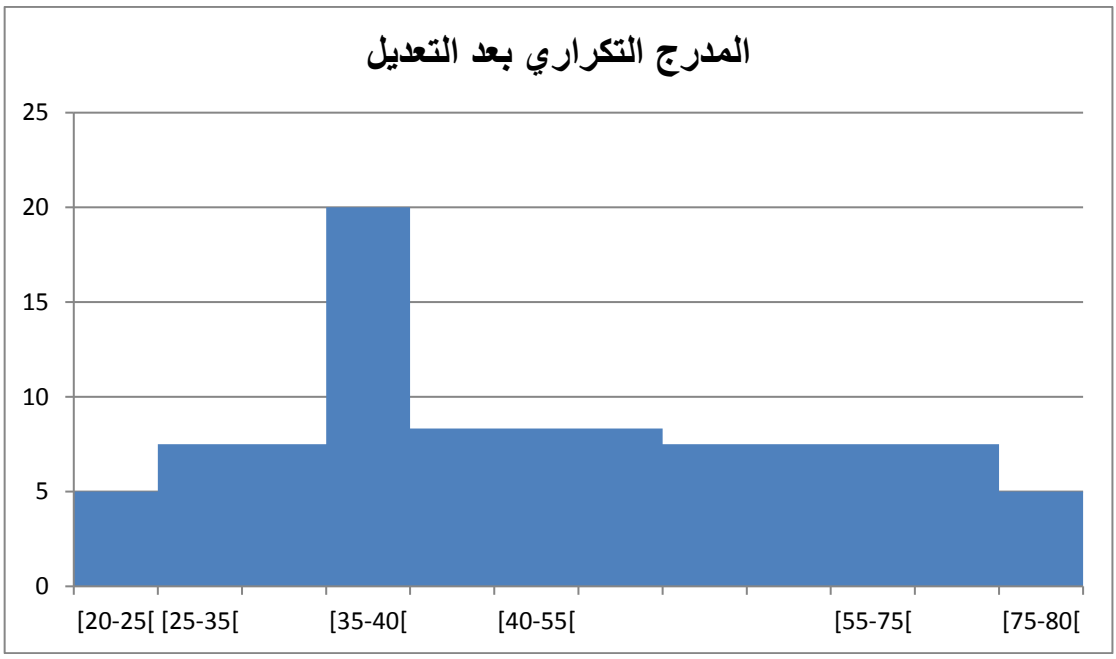
المطلوب: رسم المدرج التكراري



اذا رسمناه بالشكل الأعلى وبدون تعديل للتكرار فان الشكل خاطئ لأن المدرج التكراري غير متجانس (الفئات غير متساوية الطول) لذلك نلجأ الى تعديل التكرارات:

تعديل التكرارات: أدنى طول فئة $k_0 = 5$

فئات الأجور	التكرار n_i	طول الفئة k_i	$\frac{n_i}{k_i}$	التكرار المعدل $n'_i = \frac{n_i}{k_i} \times k_0$
]25−20]	5	5	$\frac{5}{5} = 1$	$1 \times 5 = 5$
]35−25]	15	10	$\frac{15}{10} = 1{,}5$	$1{,}5 \times 5 = 7{,}5$
]40−35]	20	5	$\frac{20}{5} = 4$	$4 \times 5 = 20$
]55−40]	25	15	1,66	8,33
]75−55]	30	20	1,5	7,5
]80−75]	5	5	1	5
المجموع	100	/	/	/



ملاحظة: نقوم بتعديل التكرارات في حالة فئات غير متساوية الطول في حالتين:

1- عند رسم المدرج التكراري؛

2- عند تحديد الفئة المنوالية وحساب المنوال.

ثالثا: التوزيع التكراري للمتغير الكيفي

1- الجدول التكراري للمتغير الكيفي:

إذا كان المتغير كيفيا فان جدول التوزيع التكراري يحتوي على:

- العمود الأول: أنواع المتغير
- العمود الثاني: التكرارات المطلقة n_i
- العمود الثالث : التكرارات النسبية f_i
- العمود الرابع : التكرارات النسبية المئوية f_i %
- أما التكرار المجمع الصاعد والنازل فليس له معنى خاصة اذا كان المتغير الكيفي غير قابل للترتيب

مثال 4:

البلد الأصلي	التكرارات n_i	f_i	f_i %
المغرب	12	0,3	30
الجزائر	16	0,4	40
تونس	9	0,225	22,5
ليبيا	3	0,075	7,5
المجموع	40	1	100

الشرح :

$n_2 = 16$: 16 جزائري من أصل 40 فرد مستجوب

$f_3\% = 22,5$: *22,5 %* من الجالية المغاربية المستجوبة في فرنسا من أصول تونسية

2- التمثيل البياني للمتغير الكيفي

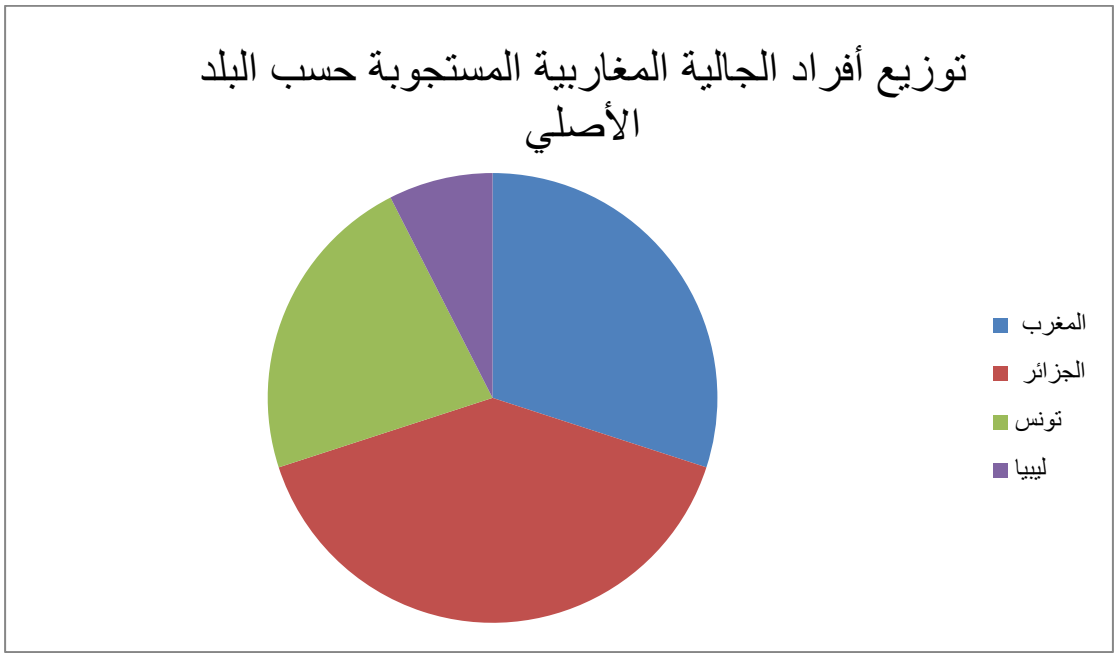
تمثل تكرارات المتغير الكيفي بـ:

أ- **الدائرة النسبية:** حيث يتناسب قيس كل زاوية مع التكرار المطلق أو النسبي الموافق له

$$\begin{cases} 360° \to n \\ x_i^\circ \to n_i \end{cases} \Rightarrow x_i^\circ = \frac{360° \times n_i}{n}$$

بالعودة إلى الجدول التكراري السابق نرفق بكل تكرار قيس الزاوية المتناسب:

البلد الأصلي	التكرارات n_i	قيس الزاوية x_i°
المغرب	12	108°
الجزائر	16	144°
تونس	9	81°
ليبيا	3	27°
المجموع	40	360°



ب-الأعمدة البيانية المستطيلة: حيث يتناسب طول كل عمود مع التكرار النسبي أو المطلق الموافق له