Chapitre 4 :

Dual et dualité d'un programme linéaire

Le programme linéaire dual.

Commençons par une interprétation économique du programme dual.

Exemple. Problème de la production. Notons :
x_j nombre d'unités du produit Pj fabriquées en entreprise I (j =1, 2,...,n)
aij nombre d'unités de la matière première Mi utilisées pour la fabrication d'une unite de Pj

cj bénéfice de l'entreprise I en vendant une unité de Pj .
Le programme linéaire pour déterminer le plan de production qui permet de maximiser le bénéfice de l'entreprise I s'énoncé comme suite :

$$\text{maximiser} \quad z(x) = cx$$
$$\text{sous les contraintes de disponibilité}$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

En forme matricielle les contraintes se lisent : $Ax \leq b$, $x \geq 0$ où $A = (a_{ij}\ ;\ i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$, $b = {}^t(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Supposons que l'entreprise II essaie de s'emparer du marché. Sous l'hypothèse d'un Comportement économique de l'entreprise I, celle-ci est prête accéder les matières Premières à un prix qui est au moins aussi élevé que le bénéfice qu'elle fera en vendant ses produits.
Soit yi le prix que l'entreprise II devra payer pour une unité de Mi (i =1, 2,...,m).
Les contraintes sont les suivantes :

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geq c_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \quad y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

En forme matricielle $y_A \geq c$, $y \geq 0$ou`y $=(y_1,y_2,...,y_m)$. L'entreprise II essaiera de minimiser le cout d'achat des matières premières : elle essaiera de minimiser

$$\sum_{i=1}^{m} y_i b_i.$$

Le programme lin´eaire pour l'entreprise II est donc de minimiser w(y) de f= yb sous les contraintes $y_A \geq c$, $y \geq 0$. Comme on verra il y a un lien mathématique étroit entre les deux programmes linéaires.

Définition.

$$\begin{array}{cc} \text{Programme primal} & \text{Programme dual} \\ (P)\begin{cases} \text{maximiser } z(x) = cx \\ \text{sous } Ax \leq b,\ x \in \mathbb{R}^n_+ \end{cases} & (D)\begin{cases} \text{minimiser } w(y) = yb \\ \text{sous } yA \geq c,\ y \in \mathbb{R}^m_+ \end{cases} \end{array}$$

Pour passer du primal au dual, on remarque que :

- Les termes du second membre deviennent les coefficients de la fonction objectif et réciproquement.
- Le problème de maximisation devient un problème de minimisation.
- Les inégalités " ≤ " deviennent des inégalités " ≥ "
- La matrice A se transforme en sa transposée.

Remarque. On a liens suivants :
m = nombre de contraintes de (P) = nombre de variables de (D),
n = nombre de variables de (P) = nombre de contraintes de (D).
Si (P) contient deux contraintes, (D) contient deux variables et peut être résolu graphiquement quelque soit le nombre de variables de (P).

Quelle est la forme de (D) si (P) n'est pas en forme canonique ? On détermine (D) en ramenant (P) à la forme canonique, comme le montre l'exemple siuvant :

Exemple :

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{maximiser} & z(x) = cx \\ \textit{sous} & Ax = b,\ x \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix},\ x \geq 0. \end{array}$$

Par la définition ci-dessus le dual de (P) est donné par

$$(D) \quad \text{minimiser} \quad w(u,v) = (u,v)\begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} = (u-v)b$$

$$\text{sous} \quad (\text{u,v})\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} = (u-v)\,A \geq c,\ u,v \in \mathbb{R}_+^m.$$

En posant $y = u - v$, on obtient

$$(D) \text{ minimiser } w(y) = yb \text{ sous } yA \geq c,\ y \text{ sans restriction de signe } \big(\text{noté } (y)\big).$$

Le résultat général est le suivant. Pour comprendre précisement son message, il convient d'étudier sa preuve.

Tableau de correspondance primal-dual

Primal	Dual
Max	Min
Matrice des contraintes *(m, n)* - Second membre des contraintes - Coefficient de la fonction objectif	- Transposée de la matrice des contraintes *(n, m)* - Coefficient de la fonction objectif - Second membre des contraintes
Nombre de contraintes i ème contrainte de type « $\leq$ » i ème contrainte de type « $\geq$ » i ème contrainte de type « = »	Nombre de variables principales i ème variable de type « ≥ 0 » i ème variable de type « ≤ 0 » i ème variable qcq « $\in IR$ »
Nombre de variables j ème variable « $\geq$ » j ème variable « $\leq$ » j ème variable qcq « $\in IR$ »	Nombre de contraintes j ème contrainte de type « $\geq$ » j ème contrainte de type « $\leq$ » i ème contrainte de type « = »

Exemples

Primal	**Dual**
$Max\ ½\, x_1 + x_2$ $S.c\ \ x_1 + x_2 \leq 3$ $-x_1 + x_2 \leq 1$ $x_1 \leq 2$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	$Min\ \ 3y_1 + y_2 + 2y_3$ $S.c\ \ y_1 - y_2 + y_3 \geq ½$ $y_1 + y_2 \geq 1$ $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$
$Min\ -x_1 + x_2$ $S.c\ \ 2x_1 - x_2 \geq 2$ $-x_1 + 2x_2 \geq -2$ $x_1 + x_2 \leq 5$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$	$Max\ \ 2y_1 - 2y_2 + 5y_3$ $S.c\ \ 2y_1 - y_2 + y_3 \leq -1$ $-y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 1$ $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \leq 0$
$Max\ \ 2x_1 - x_2$ $S.c\ \ x_1 - x_2 = 3$ $x_1 \leq 4$	$Min\ \ 3\, y_1 + 4\, y_2$ $S.c\ \ y_1 + 2\ y_2 \geq 2$ $-y_1 \geq -1$

$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0$	$y_1 \in IR,\ \ y_2 \geq 0$
$Max\ \ 2x_1 - x_2$ $S.c\ \ x_1 - 2x_2 \leq 2$ $x_1 + x_2 = 6$ $x_2 \leq 5$ $x_1 \in IR,\ x_2 \in IR$	$Min\ \ -2y_1 + 6y_2 - 5y_3$ $S.c\ \ y_1 + y_2 = 2$ $-2y_1 + y_2 + y_3 = -1$ $y_1 \geq 0,\ \ y_2 \in IR,\ \ y_3 \geq 0$

Théorème 1.1. *Les liens entre le programme primal et son dual sont les suivants :*

<u>Primal</u>	*<u>Dual</u>*
maximisation	*minimisation*
coefficient de z	*second membre des contraintes*
second membre des contraintes	*coefficient de w*

$$\text{contrainte}\begin{cases} = \\ \leq \\ \geq \end{cases} \qquad \text{variable}\begin{cases} \text{sans contrainte de signe} \\ \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{variable}\begin{cases} \text{sans contrainte de signe} \\ \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases} \qquad \text{contrainte}\begin{cases} = \\ \geq \\ \leq \end{cases}$$

Autrement

Preuve. On se donne

$$(\overline{P}) \text{ maximiser } z(x,y) = cx + dy \text{ sous } Ax + By \leq a,\ Cx + Dy = b,\ x \geq 0,\ (y)$$
$$\big((c,x) \in \mathbb{R}^s,\ d, y \in \mathbb{R}^{n-s},\ A \text{ matrice } r \times s,\ B \text{ matrice } r \times (n-s)$$
$$\text{matrice } (m-r) \times s,\ D \text{ matrice } (m-r) \times (n-s)\big).$$

On démontre que le dual de $(\overline{P})$ est donné par :

$$(\overline{D}) \text{ minimiser } w(u,v) = ua + vb \text{ sous } uA + vC \geq c,\ uB + vD = d,\ u \geq 0,\ (v)$$

$$\left|\begin{array}{r} \text{maximiser } z(x) = cx + dy \\ \text{sous } Ax + By \leq a \\ Cx + Dy = b \\ x \geq 0,\ (y) \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{r} \max z(x) = cx + dy \\ \text{sous } Ax + By \leq a \\ Cx + Dy \leq b \\ Cx + Dy \geq b \\ x \geq 0,\ (y) \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{r} \max z(x) = cx + dy_1 - dy_2 \\ \text{sous } Ax + By_1 - By_2 \leq a \\ Cx + Dy_1 - Dy_2 \leq b \\ -Cx - Dy_1 + Dy_2 \leq -b \\ x \geq 0,\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0 \end{array}\right|$$

$$\Longleftrightarrow \left|\begin{array}{c} \max z(x) = (c, d, -d) \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \text{sous} \begin{pmatrix} A & B & -B \\ C & D & -D \\ -C & -D & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a \\ b \\ -b \end{pmatrix} \end{array}\right|$$

$$\text{Passons au dual : } \left|\begin{array}{l} \min w(y') = y' \begin{pmatrix} a \\ b \\ -b \end{pmatrix} \\ \text{sous } y' \begin{pmatrix} A & B & -B \\ C & D & -D \\ -C & -D & D \end{pmatrix} \geq (c, d, -d) \\ \qquad\qquad y' \geq 0 \end{array}\right|$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\text{avec } y' = (u, v_1, v_2)) \quad \left|\begin{array}{l} \min w(u, v_1, v_2) = ua + v_1 b - v_2 b = ua + (v_1 - v_2) b \\ \text{sous } uA + v_1 C - v_2 C = uA + (v_1 - v_2) C \geq c \\ \qquad uB + v_1\ D - v_2 D = uB + (v_1 - v_2) D \geq d \\ \qquad -uB - v_1 D + v_2 D = -uB - (v_1 - v_2) D \geq -d \\ \qquad u \geq 0,\ v_1 \geq 0, v_2 \geq 0 \end{array}\right|$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\text{avec } v = v_1 - v_2) \quad \left|\begin{array}{l} \min w(u,v) = ua + vb \\ \text{sous } uA + vC \geq c \\ \qquad uB + vD \geq d \\ \qquad -uB - vD \geq -d \\ \qquad u \geq 0,\ (v) \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} \min w(u,v) = ua + vb \\ \text{sous} \qquad uA + vC \geq c \\ \qquad\qquad uB + vD = d \\ \qquad u \geq 0,\ (v) \end{array}\right|$$

L'interprétation est alors la suivante : la contrainte égalité $(\overline{P})$ est Cx+Dy = b, et b est lie à v dans (D) qui est une variable sans contrainte de signe. La variable

y est sans contrainte de signe dans $(\overline{P})$. Elle est facteur de B et D qui forment la contrainte égalité dans $(\overline{D})$. $\square$

Théorème 1.2. *Le dual du dual est le primal.*

Preuve. Pour le dual de la définition ci-dessus on a

$$\left|\begin{array}{c} \min w(y) = yb \\ \text{sous } yA \geq c \\ y \geq 0 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{c} \max\ -w(y) = {}^t(-b)^t y \\ \text{sous } (-{}^tA)^t y \leq -c \\ y \geq 0 \end{array}\right|.$$

Le dual est donc donné par $\left|\begin{array}{l} \min z(x) = -cx \\ \text{sous } {}^tx(-{}^tA) \geq {}^t(-b) \\ \qquad x \geq 0 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} \max\ -z(x) = cx \\ \text{sous } Ax \leq b \\ \qquad x \geq 0 \end{array}\right|.$

La démonstration dans le cas plus général du Théorème 1.2 est analogue. $\square$

II.2. Le théorème de dualité.

Après avoir défini le dual d'un programme linéaire, nous étudions dans cette section les liens entre les solutions de programmes en dualité.

Proposition 2.1. Soit (x, y) une solution réalisable de $(\overline{P})$ et (u, v) une solution réalisable de $(\overline{D})$. Alors :

1) $z(x, y) \leq w(u, v)$
2) $z(x, y) = w(u, v) \Longrightarrow (x, y)$ et (u, v) sont des solutions optimales de $(\overline{P})$ et $(\overline{D})$.

Preuve. 1) $z(x, y) = cx + dy \underset{(\overline{D})}{\leq} (uA + vC)x + (uB + vD)y$

$$= u(Ax + By) + v(Cx + Dy) \underset{(\overline{P})}{\leq} ua + vb = w(u, v)$$

Dans cette chaine d'inégalités il est important de noter que $x \geq 0$ et $u \geq 0$.
2) $ua + vb$ étant une borne supérieure pour $z(x, y)$, l'égalité $z(x, y) = ua + vb$ signifie que (x, y) est un point maximal de z. Raisonnement analogue pour $w(u, v)$. $\square$

Rappelons les trois cas qui peuvent se produire en appliquant le simplexe à $(\overline{P})$:

(i) il existe une (ou plusieurs) solutions optimales finies
(ii) l'ensemble des solutions réalisables est non borné et max $z(x, y) = +\infty$
(iii) $(\overline{P})$ ne possède pas de solutions réalisables.

Le même raisonnement s'applique à $(\overline{D})$. Le théorème suivant dit que trois cas seulement se produisent parmi les 9 cas possibles (voir tableau ci-dessous).

Théorème 2.2. (Théorème de dualité). *Seuls les trois cas suivants peuvent se produire :*
a) $(\overline{P})$ et $(\overline{D})$ possèdent des solutions optimales et max $z(x, y) = \min w(u, v)$.
b) $(\overline{P})$ ou $(\overline{D}$ possède une solution réalisable, mais pas les deux.
c) Ni $(\overline{P})$ ni $(\overline{D})$ possèdent des solutions réalisables.

Preuve. Essentiellement à l'aide de la proposition 2.1.
Pour la partie c) il suffit de donner un exemple où ni $(\overline{P})$ ni $(\overline{D})$ ont des solutions réalisables :
$(\overline{P})$ maximiser $z(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sous $x_1 - x_2 = 1,\ x_1 - x_2 = -1,\ x_1x_2 \geq 0$
$(\overline{D})$ minimiser $w(y_1, y_2) = y_1 - y_2$ sous $y_1 + y_2 \geq 1,\ y_1 + y_2 \leq -1,\ (y_1), (y_2)$ □

Supposons maintenant que le cas a) du théorème précédent s'est réalisé. Quelles sont les liens entre les solutions optimales de $(\overline{P})$ et de $(\overline{D})$? Comment calculer l'une à partir de l'autre ? La réponse se déduit facilement du théorème suivant.

Théorème 2.3. *Soient (x, y) resp. (u, v) des solutions réalisables de $(\overline{P})$ resp. de $(\overline{D})$. (x, y) et (u, v) sont alors des solutions optimales de $(\overline{P})$ et de $(\overline{D})$ si et seulement si les énoncés suivants valent :*

- *Si une contrainte est satisfaite en tant qu'inégalité dans $(\overline{P})$ resp. $(\overline{D})$, alors la variable correspondante de $(\overline{D})$ resp. de $(\overline{P})$ est nulle.*
- *Si la valeur d'une variable restreinte (c'est-à-dire une variable ≥ 0 ou une variable ≤ 0) dans l'un des programmes $(\overline{P})$ ou $(\overline{D})$ est $\neq 0$, alors la contrainte correspondante de l'autre programme est une égalité.*

Preuve. Soit $\xi \geq 0$ tel que $Ax + By + \xi = a$, et soit $\eta \geq 0$ tel que $uA + vC - \eta = c$ (ξ, η sont des variables d'écart). Alors

$$z(x, y) = cx + dy = (uA + vC - \eta)x + (uB + vD)y = u(Ax + By) + v(Cx + Dy) - \eta x$$
$$w(u, v) = ua + vb = u(Ax + By + \xi) + v(Cx + Dy) = u(Ax + By) + v(Cx + Dy) + u\xi$$

Donc $z(x, y) - w(u, v) = -\eta x - u\xi \leq 0$ par construction. D'après le théorème 2.2 (x, y) et (u, v) sont optimales si et seulement si $\eta x + \xi u = 0$. Donc si et seulement si $u_i\xi_i = 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, r$ et $\eta_j x_j = 0$ pour tout $j = 1, 2, \ldots, s$. L'assertion s'ensuit :

$$\begin{array}{llll}
\xi_i > 0 & (\text{contrainte} \neq \text{ dans } (\overline{P})) & \Rightarrow u_i = 0 & (\text{variable} = 0 \text{ dans } (\overline{D})) \\
u_i > 0 & (\text{variable} \neq 0 \text{ dans } (\overline{D})) & \Rightarrow \xi_i = 0 & (\text{contrainte} = \text{ dans } (\overline{P})) \\
\eta_i > 0 & (\text{contrainte} \neq \text{ dans } (\overline{D})) & \Rightarrow x_i = 0 & (\text{variable} = 0 \text{ dans } (\overline{P})) \\
x_j > 0 & (\text{variable} \neq 0 \text{ dans } (\overline{P})) & \Rightarrow \eta_j = 0 & (\text{contrainte} = \text{ dans } (\overline{D}))
\end{array}$$

Exemple. $(\overline{P})\left|\begin{array}{l} \text{maximiser } z(x) = 4x_1 + 5x_2 \\ \text{sous } 3x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 + 4x_2 \leq 1,\ \ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}\right.$

$(\overline{D})\left|\begin{array}{l} \text{minimiser } w(y) = y_1 + y_2 \\ \text{sous } 3y_1 + y_2 \geq 4,\ y_1 + 4y_2 \geq 5,\ \ y_1,\ y_2 \geq 0 \end{array}\right.$

solution optimale de $(\overline{P})$: $x = \left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right)\cdot$ Comment en déduire la solution optimale de $(\overline{D})$?

D'après le Théorème 2.3 on a

$$\left.\begin{array}{l} x_1 > 0 \Rightarrow 3y_1 + y_2 = 4 \\ x_2 > 0 \Rightarrow y_1 + 4y_2 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow (y_1, y_2) = (1, 1)$$

Donc $y_1 = y_2 = 1$ est solution optimale de $(\overline{D})$. En effet $z\left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right) = 2 = w(1, 1)$.

Le lien entre les solutions du primal et le dual sont facilement visibles si on les résoud par le simplexe. En fait, les tableaux finaux se recouvrent partiellement comme le montre le schéma ci-après. Les variables d'écart ξ de $(\overline{P})$ sont notées ξ_1, ξ_2, et les variables d'écart η de $(\overline{D})$ sont notées η_1, η_2.

$(\overline{P})$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	x_1	x_2	ξ_1	ξ_2	solution
$\downarrow$	$(\overline{D})$	$\rightarrow$	η_1	η_2	y_1	y_2	optimale de $(\overline{D})$
$\downarrow$	$\downarrow$						
ξ_1	y_1		-4/11	-1/11	1	0	1
ξ_2	y_2		-1/11	3/11	0	1	1
x_1	η_1		1	0			0
x_2	η_2		0	1			0
solution optimale de $(\overline{P})$			3/11	2/11	0	0	

Les colonnes de x_1 et x_2 et la dernière colonne représentent le tableau final du simplexe appliqué au primal. La solution optimale du primal apparaît en dernière ligne : $x_1 = 3/11,\ x_2 = 2/11$ (le tableau est transposé par rapport à la représentation habituelle : les lignes du tableau habituel sont les colonnes ici).

Les lignes de y_1 et y_2 et la dernière ligne forment le tableau optimal du simplexe appliqué au dual. La solution optimale du dual apparaît en dernière colonne : $y_1 = y_2 = 1$.
Il n'est donc pas nécessaire de résoudre $(\overline{P})$ **et** $(\overline{D})$. Il suffit de résoudre $(\overline{P})$ ou $(\overline{D})$, la solution optimale de l'autre se trouve dans le tableau optimal du premier, en dernière ligne. Il suffit alors d'identifier les variables :

$$x_i \mapsto \eta_i,\ \xi_i \mapsto y_i \qquad (i = 1, 2)$$

Interprétation économique

Considérons le **problème d'une entreprise agricole** qui désire ensemencer avec 3 variétés de plante A,B et C .
Il s'agit de déterminer les superficies xi (en hectare) des terres ensemencées par les plantes A,B et C pour avoir un bénéfice maximal. Voici le tableau qui résume la situation

Terrain (ha)	Travail (h)	Machine (h)	Rendement
A	2	1	1100
B	3	2	1400
C	1	3	1500
340	2400	560	

Par exemple, il faudra 3 heures de travail par hectare pour ensemencer avec la plante B et 2 heures de machinerie. La dimension totale du terrain est de 340 ha et nous disposons de 2400 heures de temps de travail et de 560 heures en temps de machinerie. 1 hectare de la plante A donne un profit de 1100 DA.
La fonction objective est
max $z = 1100x_1 + 1400x_2 + 1500x_3$
Contrainte 1 : dimension du terrain
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 340$
Contrainte 2 : temps de travail
$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 2400$

Contrainte 3 : temps de machine
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 560$
On ajoute les variables d'écart x_4, x_5, x_6 à ce problème et on applique la méthode du simplexe.
Le tableau final est donné par

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	0	-1	2	0	1	120
x_5	0	0	-3	-1	1	-1	1500
x_2	0	1	2	-1	0	1	220
	0	0	-200	-800	0	-300	$-440,000$

La solution est
$x_1 = 120$, $x_2 = 220$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1500$, $x_6 = 0$
et le profit est $z = 440, 000$ DA.
— On observe que les ressources de terrain et de machinerie sont pleinement utilisées car $x_4 = x_6 = 0$.
— Par contre, la ressource en temps de travail n'est pas pleinement utilisée car x_5, $x_6= 0$.
Si on disposait d'un hectare ou d'une heure de travail ou de machinerie de plus, quel serait le profit de plus ? C'est le concept de coût marginal. Introduisons les variables

y_1 = coût marginal de 1 ha de terrain
y_2 = coût marginal de 1 h de travail
y_3 = coût marginal de 1 h de machine

On devrait avoir $y_2 = 0$ car la ressource en temps de travail n'est pas pleinement utilisée.
Maintenant, regardons le point de vue d'un acheteur des activités de l'entreprise. Les coûts marginaux sont mieux interprétés de la manière suivante :

y_1 = prix à offrir pour acheter un ha de terrain
y_2 = prix à offrir pour acheter une h de travail
y_3 = prix à offrir pour acheter une h de machine
Quel sera le problème à résoudre pour déterminer ces variables ?

La fonction objective correspond au coût à payer pour acheter l'entreprise
$z = 340y_1 + 2400y_2 + 560y_3 = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 = b^ty$.
Il s'agit de minimiser le prix à payer : $\min z = b^ty$.
Pour cela, son offre sera acceptée s'il offre au moins autant que le bénéfice de chacune des activités.
Activité A : le bénéfice lié à l'ensemencement de la plante A est

$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1100$.
Activité B : le bénéfice lié à l'ensemencement de la plante B est
$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 1400$.
Activité C : le bénéfice lié à l'ensemencement de la plante C est
$y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1500$.
En résumé, le problème s'écrit

$$\begin{cases} \min \quad z = 340y_1 + 2400y_2 + 560y_3 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1100, \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 1400, \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1500, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Le principe de la dualité peut s'énoncer de la manière suivante : le plus bas prix total à payer pour l'acheteur doit être égal au bénéfice maximal pour le producteur.

Détermination de la solution du problème dual à partir du primal

Dans cette section, nous allons voir comment nous pouvons calculer la solution du problème dual à l'aide du tableau final du simplexe appliqué au problème primal. Nous allons donner deux exemples.
Considérons le problème suivant de type Diète

$$\begin{cases} \min \quad z = 340x_1 + 2400x_2 + 560x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1100, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1400, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 1500, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Ce problème est du type

$$\begin{array}{lll} \min \quad c^t x & \Longleftrightarrow & \min \quad c^t x \\ Ax \geq b & & -Ax \leq -b \\ x \geq 0 & & x \geq 0 \end{array}$$

On applique la méthode du simplexe à partir de la formulation de droite à cause du signe $\geq \Longrightarrow \leq$. Après les Phases I et II, le tableau final obtenu est :

x_6	0	3	0	1	-2	1	200
x_3	0	1	1	1	-1	0	300
x_1	1	1	0	-2	1	0	800
	0	1500	0	120	220	0	-440000

La solution optimale sera
$x = (800, 0, 300, 0, 0, 200) \Longleftrightarrow x_1 = 800, x_2 = 0, x_3 = 300, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 200.$
Calculons la solution du problème dual. Le dual s'écrit

$$\begin{cases} \max \quad z = 1100y_1 + 1400y_2 + 1500y_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \leq 340, \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 2400, \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 560, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Ce problème est du type

$$\begin{array}{ll} \max & b^t y \\ A^t y \leq c & \\ y \geq 0 & \end{array} \Longleftrightarrow - \begin{array}{ll} \min & -b^t y \\ A^t y \leq c & \\ x \geq 0 & \end{array}$$

On applique la méthode du simplexe à partir de la formulation de droite. Après la Phase II seulement (car y = 0 est réalisable), le tableau final est :

y_1	1	0	−1	2	0	−1	120
y_5	0	0	−3	−1	1	−1	1500
y_2	0	1	2	−1	0	1	220
	0	0	200	800	0	300	440000

La solution optimale sera
$y = (120, 220, 0, 0, 1500, 0) \Longleftrightarrow y_1 = 120, y_2 = 220, y_3 = 0, y_4 = 0, y_5 = 1500, y_6 = 0.$
On observe que la solution y se trouve à la dernière ligne du tableau final du simplexe du problème primal. En effet, les coefficients c_i de la dernière du tableau correspondent à
$c_4 = y_1 = 120, c_5 = y_2 = 220, c_6 = y_3 = 0, c_1 = y_4 = 0, c_2 = y_5 = 1500, c_3 = y_6 = 0$
En parfaite dualité, on a les mêmes relations par rapport au tableau du problème dual. On obtient que les coefficients c_i de la dernière du tableau du dual correspondent à
$c_4 = x_1 = 800, c_5 = x_2 = 0, c_6 = x_3 = 300, c_1 = x_4 = 0, c_2 = x_5 = 0, c_3 = x_6 = 200.$
Voici un autre exemple.

Exemple

Considérons le problème

$$\begin{cases} \min \quad z = 50x_1 + 80x_2 \\ 3x_1 \geq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 10, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 8, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ce problème est du type

$$\begin{array}{lcl} \min \quad c^t x & \Longleftrightarrow & \min \quad c^t x \\ Ax \geq b & & -Ax \leq -b \\ x \geq 0 & & x \geq 0 \end{array}$$

On applique la méthode du simplexe à partir de la formulation de droite à cause du signe $\geq \Longrightarrow \leq$. Après les Phases I et II, le tableau final obtenu est :

x_2	0	1	1/6	−1/4	0	3/2
x_1	1	0	−1/3	0	0	2
x_5	0	0	1/6	−5/4	1	7/2
	0	0	10/3	20	0	−220

La solution optimale sera
$x = (2, 3/2, 0, 0, 7/2) \Longleftrightarrow x_1 = 2, x_2 = 3/2, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 7/2.$
Calculons la solution du problème dual. Le dual s'écrit

$$\begin{cases} \max \quad z = 6y_1 + 10y_2 + 8y_3 \\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 50, \\ 4y_2 + 5y_3 \leq 80, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Ce problème est du type

$$\begin{array}{lcl} \max \quad b^t y & \Longleftrightarrow - & \min \quad -b^t y \\ A^t y \leq c & & A^t y \leq c \\ y \geq 0 & & x \geq 0 \end{array}$$

On applique la méthode du simplexe à partir de la formulation de droite. Après la Phase II seulement (car $y = 0$ est réalisable), le tableau final est :

y_1	1	0	−1/6	1/3	−1/6	10/3
y_2	0	1	5/4	0	1/4	20
	0	0	7/2	2	3/2	220

La solution optimale sera
$y = (10/3, 20, 0, 0, 0) \Longleftrightarrow y_1 = 10/3, y_2 = 20, y_3 = 0, y_4 = 0, y_5 = 0.$
On observe que la solution y se trouve à la dernière ligne du tableau final du simplexe du problème primal. En effet, les coefficients ci de la dernière du tableau correspondent à
$c_3 = y_1 = 10/3, c_4 = y_2 = 20, c_5 = y_3 = 0, c_1 = y_4 = 0, c_2 = y_5 = 0.$
En parfaite dualité, on a les mêmes relations par rapport au tableau du problème dual. On obtient que les coefficients ci de la dernière du tableau du dual correspondent à
$c_4 = x_1 = 2, c_5 = x_2 = 3/2, c_1 = x_3 = 0, c_2 = x_4 = 0, c_3 = x_5 = 7/2.$
Les relations de complémentarité sont aussi satisfaites :
$x_i y_{m+i} = 0 \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$

$$x_i y_{m+i} = 0 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

On a

$$\begin{aligned} x_1\ y_4 &= 2 \times 0 = 0, \\ x_2\ y_5 &= 3/2 \times 0 = 0. \end{aligned}$$

De même pour la seconde relation de complémentarité

$$y_i x_{n+i} = 0 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

On a

$$\begin{aligned} y_1\ x_3 &= 10/3 \times 0 = 0, \\ y_2\ x_4 &= 20 \times 0 = 0, \\ y_3\ x_5 &= 0 \times 7/2 = 0. \end{aligned}$$