Université Djilali Bounaama (Khemis Miliana) L3 Mathématiques (2020/2021)
Département de Mathématiques-Informatiques Matière: Mesures et intégrations

Série d'exercices n 01
Tribus et mesures

Exercice 1: Soit E un ensemble.

1. Soit T une partie de $P(E)$ stable par union dénombrable, stable par passage au complémentaire et t.q. $\emptyset \in T$. Montrer que T est une tribu, c'est-à-dire qu'elle vérifie aussi $E \in T$ et qu'elle est stable par intersection dénombrable.
2. L'ensemble des parties finies de E est-il une tribu ?
3. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.
4. Donner un exemple montrant que $A \cup B$ n'est pas nécessairement une tribu sur E.

Exercice 2: (image réciproque de la tribu)

Soit $f : \Omega \to E$ une fonction et S une tribu sur E . Montrer que

$$T = \left\{ f^{-1}(s) / s \in S \right\}$$

est une tribu de Ω .

Dans le cas où Ω est une partie de E et f définie par $f(x) = x$ pour tout x, on a : $\mathcal{T} = \{\Omega \bigcap B; B \in \mathcal{B}\}$ et on dit que $\mathcal{T}$ est la tribu de Ω induite par la tribu $\mathcal{B}$ de E.

2) Exemple : $\Omega = \{-1, 0, 1, 2\}$, $\quad E = \{0, 1, 4\}$, $\quad \mathcal{B} = \mathcal{P}(E)$, $\quad f : x \mapsto x^2$.

Déterminer $f^{-1}(\mathcal{P}(E))$.

3) Si $\mathcal{T}$ est une tribu de Ω, alors $f(\mathcal{T}) = \{f(B); \quad B \in \mathcal{T}\}$ n'est en général pas une tribu de E. Donner un exemple.

Exercice 3: (Tribu trace)

1. Soit T une tribu sur un ensemble E et $F \subset E$. Montrer que $T_F = \{A \cap F, A \in T\}$ est une tribu sur F (tribu trace de T sur F).

Exercice 4: (Tribu-image) Soit $f : X \to Y$ et T une tribu sur Y . Montrer que

$$T = \left\{ S \subset Y \ / f^{-1}(S) \in T \right\}$$

est une tribu de Y .

Exercice 5: Soit Ω un ensemble et $A \in P(\Omega)$. Déterminer la tribu engendrée par $C = \{A\}$.

Exercice 6: (Lemme de transport)

Soit $f : X \to Y$ et E une partie de parties de Y. Montrer que

$$\sigma\left(f^{-1}(E)\right) = f^{-1}(\sigma(E)).$$

Exercice 6:

Soit μ une mesure finie sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

1) Montrer que si A et B appartiennent à $\mathcal{T}$ alors :

$$\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \bigcap B)$$

2) Si A , B , C sont dans $\mathcal{T}$ alors :

$$\mu(A \bigcup B \bigcup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \bigcap B) - \mu(A \bigcap C) - \mu(B \bigcap C) + \mu(A \bigcap B \bigcap C)$$

Exercice 7:

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable , $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n}$, n mesures sur $(\Omega, \mathcal{T})$ et $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, n réels positifs. Pour A dans $\mathcal{T}$ on pose :

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i(A)$$

Montrer que μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$ notée $\mu = \sum_{i=0}^{n} a_i \mu_i$.

Exercice 8:

On considère les mesures suivantes sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$:

$$\mu_1 = \sum_{p \in \mathbb{N}} \delta_p \quad \mu_2 = \sum_{p \in \mathbb{N}} p\delta_p \quad \mu_3 = \lambda$$

où δ_p est la mesure de Dirac en p et λ est la mesure de Lebesgue.

Calculer pour chacune de ces mesures les mesures des ensembles suivants :

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n = [n, n + 1 + 1/n^2], \quad C_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \quad D_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

$$C = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \quad D = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

Exercice 9:

On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, ($\lambda$, mesure de Lebesgue) ; pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ on note : $A + a = \{x + a \text{ tels que } x \in A\}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.

1) Montrer que :

$$\mathcal{T}_a = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ tel que } A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

est une tribu sur $\mathbb{R}$.

2) montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}_a$ puis que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_a$.

3) Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on pose $\mu(A) = \lambda(A + a)$. Montrer que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

4) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a : $\lambda(A + a) = \lambda(A)$ (invariance de la mesure de Lebesgue par translation.