

CHAPITRE 3

FLEXION SIMPLE

3.1 Définitions et hypothèses

L'action des forces latérales sur une poutre se traduit en une déformation de l'axe longitudinale initialement droit en une courbe curviligne (Figure 3.1). L'état d'une section de poutre où toutes les composantes des efforts de déformation internes, sauf un moment fléchissant M_y ou M_z n'est pas nul, est dit état de flexion plane pure.

La déformation résultante de ce genre de sollicitation est connue sous le nom de la flèche (déplacement vertical des différents points). Lorsque l'effort tranchant n'est pas nul, en ce cas la sollicitation est dite flexion simple.

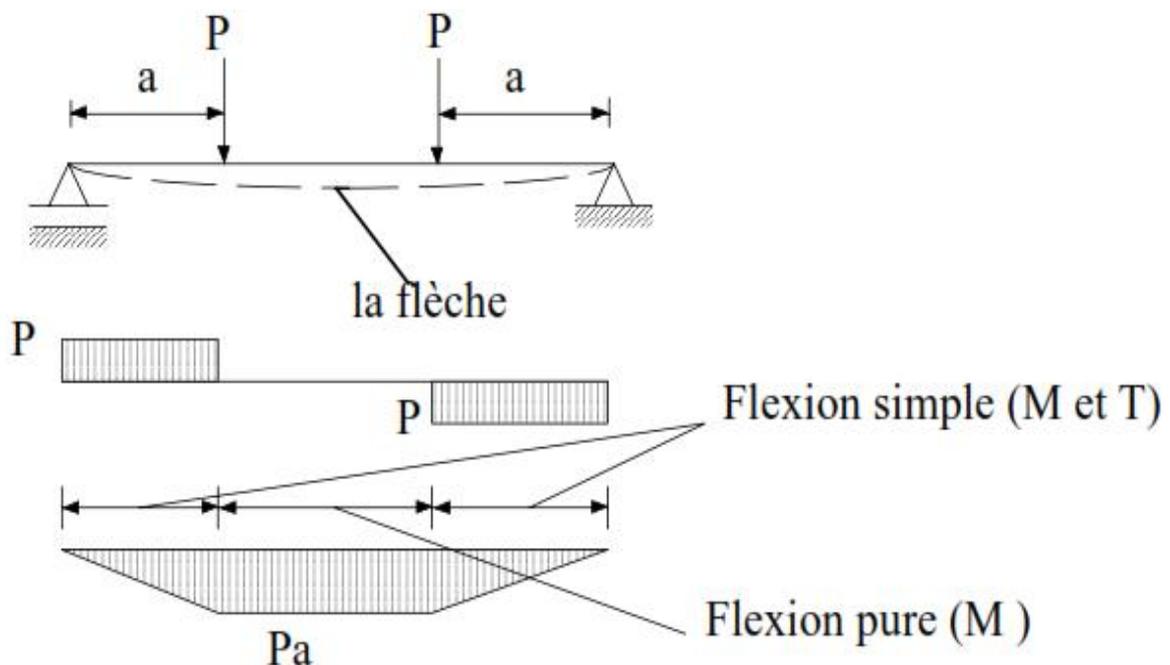


Figure 3.1 : Exemple d'une poutre soumise à la flexion.

Après déformation, on constate que les fibres situées en partie supérieure sont sollicitées en compression tandis que celles qui sont situées en partie inférieure sont sollicitées en traction (Figure 3.2).

Entre ces deux régions, il existe une fibre qui n'est ni tendue ni comprimée : c'est la fibre neutre.

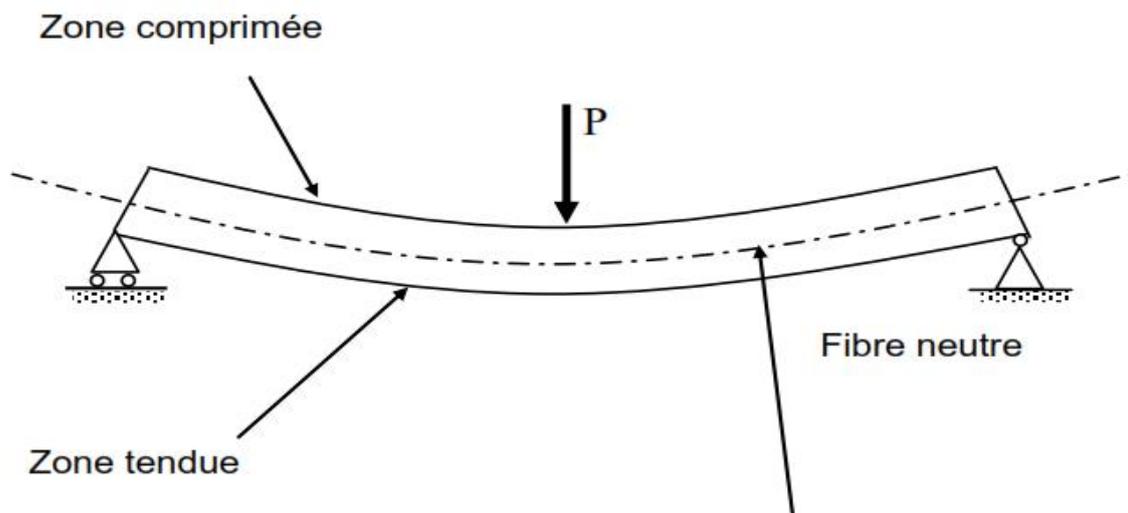


Figure 3.2 : Poutre après la déformation.

▪ **Hypothèses**

- a) Les déformations sont élastiques et suffisamment petites pour ne pas modifier l'intensité des forces ni leurs distances respectives.
- b) Toute fibre contenue dans un plan de symétrie demeure dans ce plan pendant la déformation.
- c) Hypothèse de Navier-Bernoulli: les sections droites de la poutre demeurent planes et perpendiculaires à l'axe de celle-ci après déformation.

3.2 Efforts tranchants, moments fléchissants

Soit la poutre ci-dessous (Figure 3.3) soumise à la flexion simple. Imaginons une coupure en un point C qui divise la poutre en deux parties notées gauche et droite. Chacune de ces deux parties est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs qu'elle reçoit et sous l'action des effets de l'autre partie (efforts intérieurs).

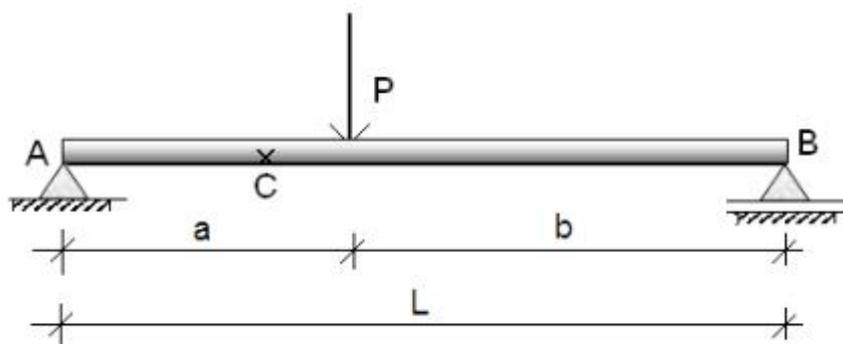


Figure 3.3 : Exemple illustratif d'une poutre sollicitée en flexion simple.

Chacune des deux parties agit sur l'autre de sorte que:

- ✓ Tous les mouvements horizontaux, verticaux et de rotation d'une partie par rapport à l'autre sont nuls.
- ✓ Chaque partie est en équilibre

Pour qu'il y ait concordance en signe entre les deux parties, on utilise la convention de signe montrée sur la Figure 3.4.

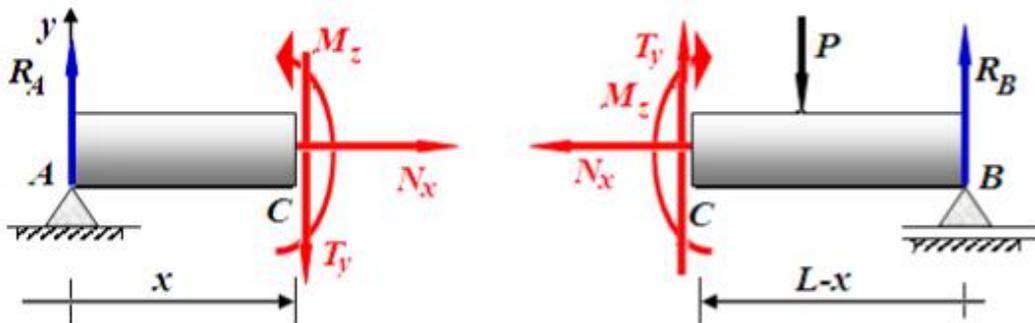


Figure 3.4 : Conventions de signe.

L'effort tranchant $T(x)$ dans une section d'abscisse x , séparant la poutre orientée en une partie gauche et une partie droite, est la résultante des forces extérieures s'exerçant sur la partie gauche.

Le moment fléchissant $M(x)$ dans une section d'abscisse x , séparant la poutre orientée en une partie gauche et une partie droite, est la somme des moments extérieurs (dus aux couples concentrés et aux efforts d'action et de réaction) s'exerçant sur la partie gauche.

3.3 Diagrammes des Efforts tranchants et des moments fléchissants

En général, les efforts et moments agissant dans différentes sections varient le long de la poutre. Entre autres les valeurs maximales et minimales de ces efforts et moments sont d'une grande importance pour la sécurité de la poutre, on s'intéresse donc à tracer des courbes qui montrent comment changent les efforts et les moments d'une section à une autre, on appelle ces courbes les diagrammes des efforts et des moments.

On se limite dans cette section à l'étude des diagrammes des efforts et des moments dans les poutres à deux dimensions (plan XOY), ce qui réduit le nombre des efforts et des moments à trois, à savoir un effort normal N , un effort tranchant T_y , et un moment fléchissant M_z .

3.3.1 Zones des efforts internes dans une poutre

La variation d'un effort ou moment dans une zone (ou trçons) d'une poutre est caractérisé par une même loi mathématique. Dans l'application, l'extrémité d'une zone est imposée par l'extrémité de la poutre (extrémité libre appuis de rive ou intermédiaire), changement brutal de la charge, ou le changement brutal de la direction de l'axe de la poutre (Figure 3.5).

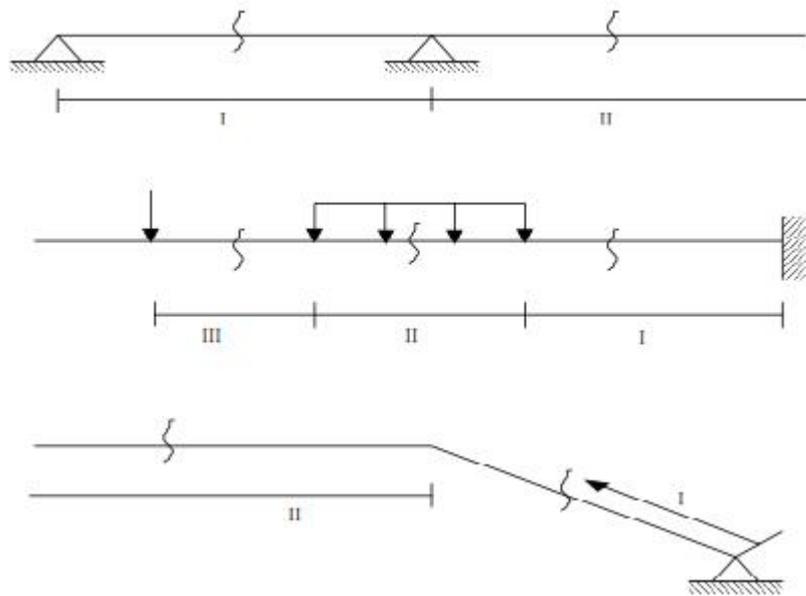


Figure 3.5 : Zones des efforts internes dans une poutre.

3.3.2 Construction des diagrammes des efforts internes d'une poutre

Pour pouvoir tracer les diagrammes, il est indispensable de connaître toutes les forces extérieures y compris les réactions qui doivent être préalablement déterminées.

Pour déterminer les réactions d'une poutre isostatique (efforts de liaison), il faut écrire les conditions d'équilibre (la loi fondamentale de la statique).

Pour une poutre articulée isostatique, aux trois équations fondamentales de la statique s'ajoute une équation supplémentaire : en effet par rapport au centre de l'articulation, la somme des moments créés par toutes les forces situées d'un côté de cette dernière est nulle.

Le tracé des diagrammes des efforts et des moments peut être fait à l'aide des équations analytiques ou par la méthode directe.

La méthode analytique consiste à trouver les expressions des efforts et des moments pour chaque zone en fonction de l'abscisse x de la ligne moyenne de la poutre. Ces expressions peuvent être établies par les équations d'équilibre de toutes les forces (y compris les réactions des appuis)

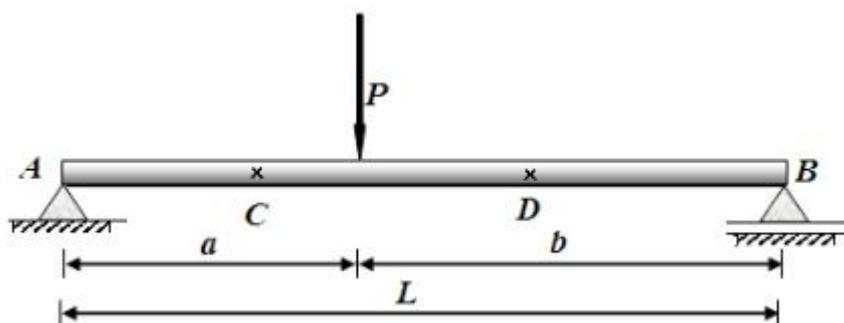
appliquées à gauche ou à droite de la section considérée. Une fois que ces expressions sont déterminées, on peut donc tracer leurs diagrammes.

La méthode directe est très rapide généralement utilisée dans les cas de chargements simples. Elle consiste à déterminer les valeurs numériques des efforts intérieurs aux extrémités de chaque tronçon. Ces points sont joints par des lignes ou courbes dont les caractéristiques sont déterminées sur la base des relations différentielles entre les efforts intérieurs et les forces extérieures citées ci-dessous.

- Sur les tronçons où il n'y a pas de charge répartie, le diagramme des T est délimité par des droites parallèles à la base tandis que le diagramme des M est présenté, par des droites obliques.
- Sur les tronçons où la poutre supporte une charge répartie, le diagramme des T est délimité par des droites obliques tandis que celui des M est délimité par des paraboles carrées. Quand on trace le diagramme des M du côté des fibres tendues, l'incurvation de la parabole est dirigée dans le sens contraire de la charge q_y .
- Les maximums et minimums des M coïncident avec les sections où $T = 0$.
- Dans les sections où les charges concentrées sont appliquées à la poutre, le diagramme des T est caractérisé par des passages brusques aux niveaux de ces charges, celui des M , il y aura des brisures dont la pointe sera dirigée dans le sens de la ligne d'action de la force.
- Dans les sections où les charges moments sont appliquées à la poutre, le diagramme des moments sera marqué par des passages brusques d'une valeur proportionnelle à ces moments tandis que sur le diagramme des T , il n'y aura aucune modification.

Exemple 01

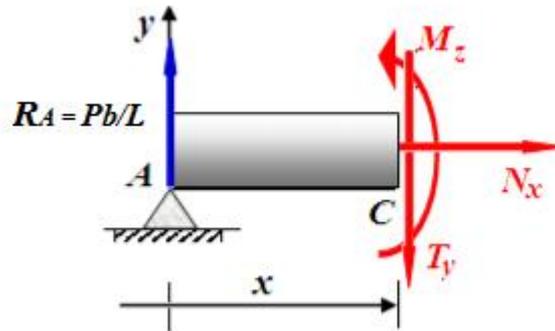
Exprimer et tracer la variation de l'effort tranchant et le moment fléchissant le long de la poutre schématisée par la figure suivante.



Solution 01

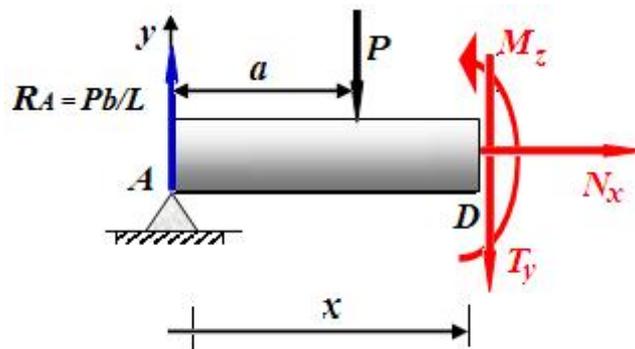
Supposons que la poutre coupée au point C (1 partie) puis au point (D) (2 partie).

1^{ère} partie : 0 x a



- $\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$
- $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = Pb/L$
- $M/C = 0 \Rightarrow M_z = (Pb/L) \cdot x$
 - $M_z(x=0) = 0$
 - $M_z(x=a) = Pab/L$

2^{ème} partie : a x L



- $\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$
- $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = -Pb/L$
- $M/D = 0 \Rightarrow M_z = (Pb/L)x - P(x-a)$
 - $M_z(x=a) = Pab/L$
 - $M_z(x=L) = 0$

Ayant obtenu les expressions des efforts tranchants et moments fléchissants pour chacune des deux parties, traçons leurs variations le long de la poutre comme montrées par la figure ci-dessous.

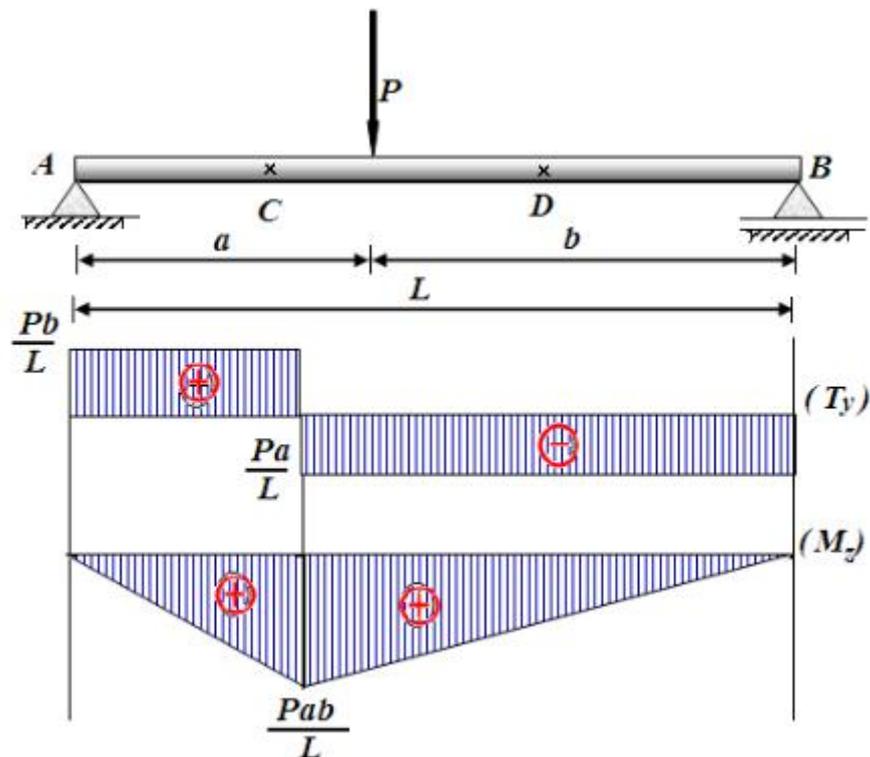


Figure 3.6 : Diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants.

3.4 Relations différentielles entre les charges et les efforts

Ils existent des relations différentielles entre les forces extérieures et intérieures et qui constituent la base de la méthode directe pour la détermination des efforts internes.

Pour déterminer ces relations on considère un cas de charge arbitraire d'un système de sollicitations donné dans un plan (Figure 3.7) avec :

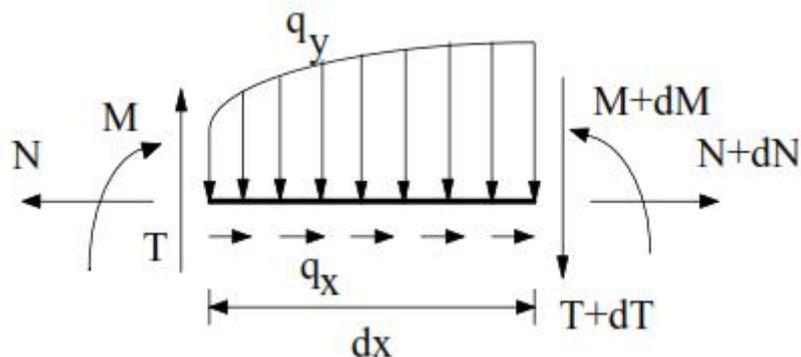


Figure 3.7 : Élément de poutre isolé chargé par une force uniformément répartie.

q_x : intensité de la charge extérieure selon l'axes X

q_y : intensité de la charge extérieure selon l'axes Y

La relation entre l'intensité de la charge q_x est l'effort normal est obtenue par l'équation d'équilibre d'un élément dx et peut être exprimée par :

$$N - q_x(x)dx - N - dN = 0$$

$$\Rightarrow dN/dx = - q_x(x)$$

Entre l'intensité q_y , l'effort tranchant T et le moment fléchissant M qui agissent dans une certaine section, existent les relations différentielles suivantes :

$$T - q_y(x)dx - T - dT = 0$$

$$\Rightarrow dT/dx = - q_y(x)$$

$$M + Tdx - q_y(x) dx^2/2 - M - dM = 0$$

En négligeant le terme quadratique en dx^2 on obtient :

$$dM/dx = T$$

où

$$d^2M/dx^2 = - q_y$$

3.5 Contraintes normales en flexion plane

Dans cette partie, nous proposons d'étudier le passage de l'effort interne aux contraintes agissant sur les sections de la poutre et particulièrement la distribution des contraintes normales et tangentielles résultant d'une flexion et d'un effort tranchant.

Des contraintes normales se développent dans les sections transversales d'une poutre soumise à un moment fléchissant. La Figure 3.8 montre les fibres tendues et comprimées externes d'un trançon de poutre fléchi. Dans la zone comprimée les fibres se raccourcissent tandis que dans la zone de traction elles s'allongent. Ces deux zones sont séparées par un plan neutre ayant un rayon de courbure R et dont la longueur ne varie pas lors de la flexion. L'allongement relatif d'une fibre se trouvant à une distance y de l'axe neutre peut être écrit :

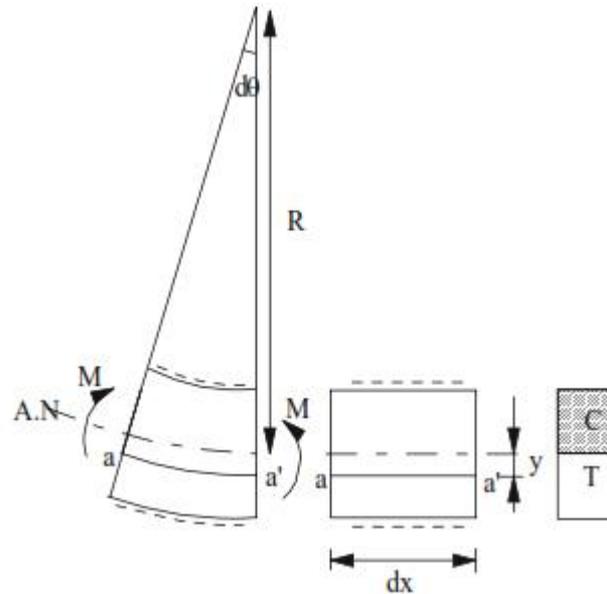


Figure 3.8 : Contrainte dans une fibre déformée.

$$\varepsilon = \frac{a'b'}{ab} = \frac{(R+y)d\theta - dx}{dx} \tag{3.1}$$

Avec :

$$dx = R d\theta \tag{3.2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{y}{R} \tag{3.3}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{3.4}$$

D'où :
$$\sigma = \frac{E}{R} y \tag{3.5}$$

La condition d'équilibre lie les contraintes et les efforts internes dans la section transversales d'une poutre est :

$$\int_s y ds = M \tag{3.6}$$

En introduisant la valeur de de l'équation (4.5) dans l'expression (7.6) on obtient :

$$M = \int_s \frac{E}{R} y^2 ds \tag{3.7}$$

$$M = \frac{E}{R} \iint_s y^2 ds \tag{3.8}$$

$$M = \frac{E I_z}{R} \quad (3.9)$$

En introduisant l'équation (3.5) dans (3.9), la contrainte normale en tout point de la section de la poutre distante de y de l'axe x a pour valeur :

$$= \frac{M y}{I_z} \quad (3.10)$$

L'équation (3.10) est appelée formule de Navier dont on note que :

- ✓ Les contraintes sont proportionnelles au moment fléchissant et inversement proportionnelles au moment d'inertie I .
- ✓ Les contraintes varient linéairement avec la distance y de l'axe neutre.
- ✓ La fibre la plus sollicitée (la contrainte de traction ou de compression maximales) est située au point le plus éloigné de l'axe neutre.

L'application de cette formule est générale, mais on se considérera que les cas particulier suivants :

1. Cas d'une section ayant un axe de symétrie horizontal :

$$y_{max}^- = y_{max}^+ \quad (3.11)$$

$$|\sigma_{max}^-| = |\sigma_{max}^+| = \sigma_{max} = \frac{M y_{max}}{I_x} \quad (3.12)$$

σ_{max} : La contrainte normale maximale.

$$W_y = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{I_x}{h/2} : \text{Module résistant de la section.}$$

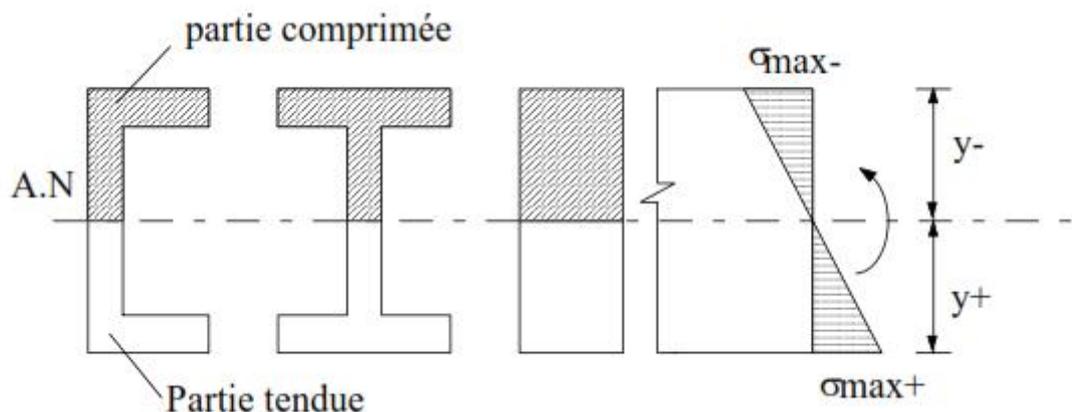


Figure 3.9 : Distribution des contraintes dans une section ayant un axe de symétrie horizontal.

2. Cas d'une section n'ayant pas un axe de symétrie horizontal :

Dans ce cas les contraintes de traction et de compression maximales sont différentes.

$$|\sigma_{max}^-| = \left| \frac{My_{max}^-}{I_x} \right| \quad (3.13)$$

$$\sigma_{max}^+ = \frac{My_{max}^+}{I_x} \quad (3.14)$$

σ_{max}^- : Contrainte de compression max.

σ_{max}^+ : Contrainte de traction max.

y_{max}^- et y_{max}^+ : Distances des fibres comprimées et tendues les plus éloignées.

M : Moment fléchissant.

D' où on distingue 2 modules résistants de la section : $\frac{Y_{max}^+}{I_x}$ $\frac{Y_{max}^-}{I_x}$

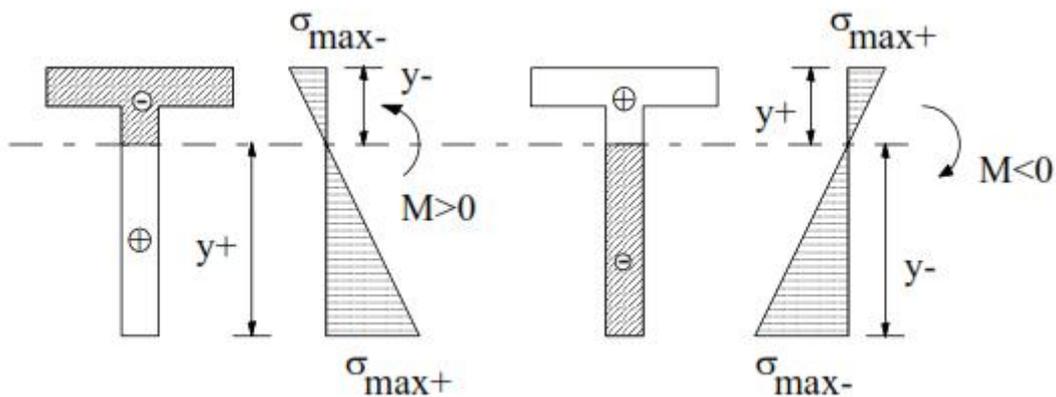


Figure 3.10 : Distribution des contraintes dans une section n'ayant pas un axe de symétrie horizontal.

3.6 Calcul de résistance en flexion

La vérification d'une poutre en flexion se fait à partir de la condition de résistance par rapport aux contraintes normales maximales dans la section.

a) Pour une section symétrique :

$$|\sigma_{max}| = \left| \frac{My_{max}}{I_z} \right| \leq \min([\sigma_-], [\sigma_+]) \quad (3.15)$$

b) Pour une section non symétrique :

$$\text{Si } [\sigma_-] = [\sigma_+] = [\sigma] \Rightarrow \max(|\sigma_{max}^-|, |\sigma_{max}^+|) \leq [\sigma] \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } [\sigma_-] \neq [\sigma_+] \\ |\sigma_{max}^-| \leq [\sigma_-] \\ |\sigma_{max}^+| \leq [\sigma_+] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Exemple 02 :

Vérifier la résistance de la poutre ci-dessous (Figure 3.11) si la contrainte admissible $[\sigma] = 160 \text{ N/mm}^2$.

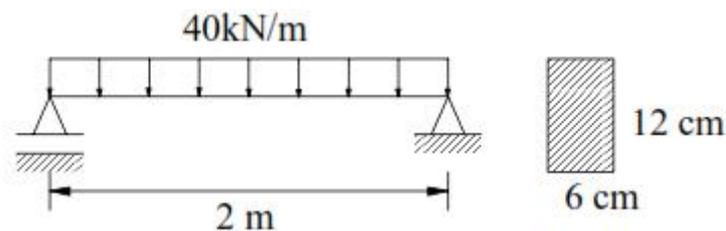


Figure 3.11 : Poutre simplement appui avec une section droite symétrie.

Solution 02 :

Le moment maximal est à mi-travé :

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{40 \times 4}{8} = 20 \text{ kN.m}$$

$$I_z = \frac{60 \times 120^3}{12} = 860 \times 10^4 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max} y_{max}}{I_z} = \frac{2 \times 10^6 \times 60}{864 \times 10^4} = 138,8 \text{ N/mm}^2 < 160 \text{ N/mm}^2$$

Exemple 03 :

Vérifier la résistance de la poutre ci-dessous (Figure 3.12).

On donne : $I_z = 2 \times 10^7 \text{ mm}^4$; $h = 160 \text{ mm}$; $y_G = 60 \text{ mm}$; $[\sigma_-] = 80 \text{ N/mm}^2$; $[\sigma_+] = 120 \text{ N/mm}^2$.

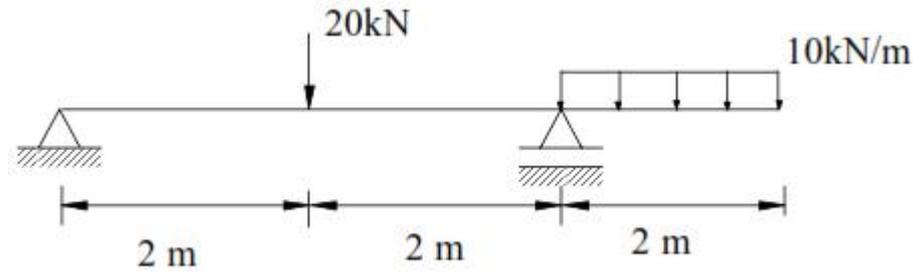


Figure 3.12 : Poutre simplement appuie avec une section droite non symétrique.

Solution 03 :

✓ On trace le diagramme des moments :

$$\Rightarrow M_{max}^+ = 10 \text{ kN.m}$$

$$M_{max}^- = 20 \text{ kN.m}$$

✓ Calcul des contraintes :

Pour $M_{max}^+ = 10 \text{ kN.m}$

$$\sigma_{max}^+ = \frac{10 \times 10^6 \times 60}{2 \times 10^7} = 30 \text{ N/mm}^2 \leq 120 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{max}^- = \frac{10 \times 10^6 \times 100}{2 \times 10^7} = 50 \text{ N/mm}^2 \leq 80 \text{ N/mm}^2$$

Et pour $M_{max}^- = 20 \text{ kN.m}$

$$\sigma_{max}^+ = \frac{20 \times 10^6 \times 100}{2 \times 10^7} = 100 \text{ N/mm}^2 \leq 120 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{max}^- = \frac{20 \times 10^6 \times 60}{2 \times 10^7} = 60 \text{ N/mm}^2 \leq 80 \text{ N/mm}^2$$

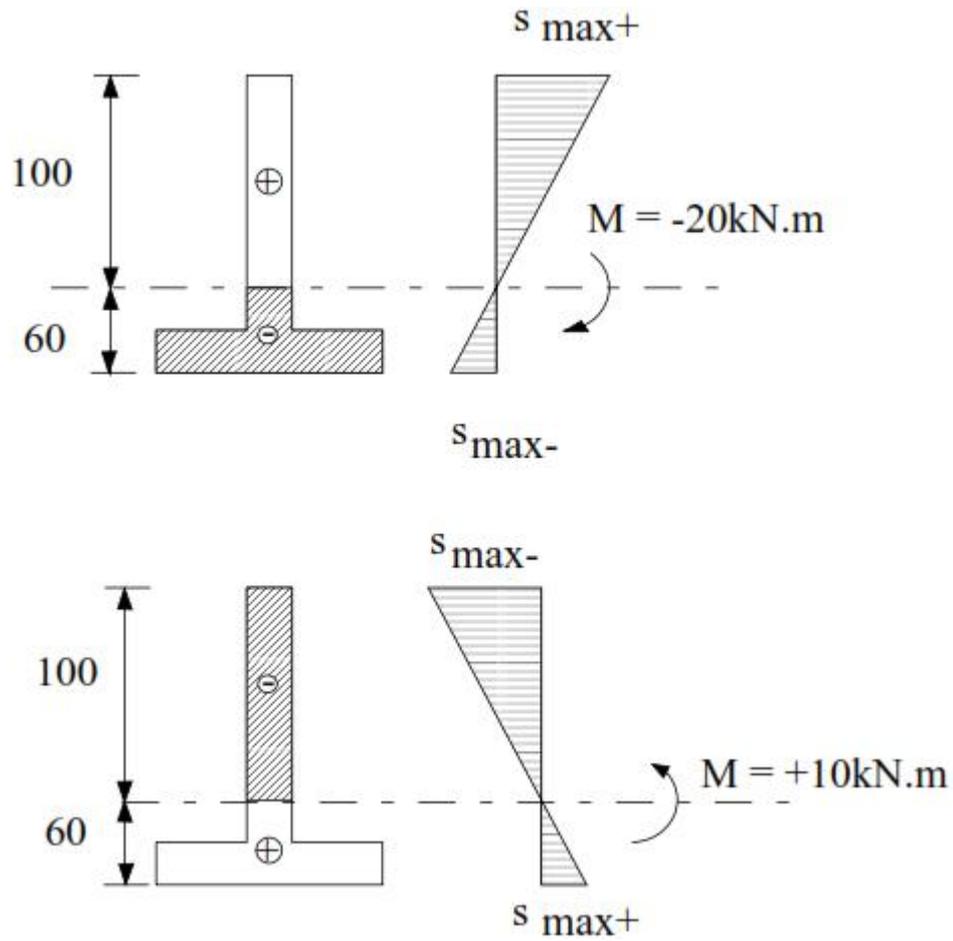


Figure 3.13 : Distribution des contraintes.

3.7 Contraintes tangentielles en flexion

Quand une poutre est soumise à l'action simultanée d'un moment fléchissant et d'un effort tranchant, en plus des contraintes normales, des contraintes tangentielles apparaissent aussi au niveau des sections droites comme le montre dans la figure 3.14

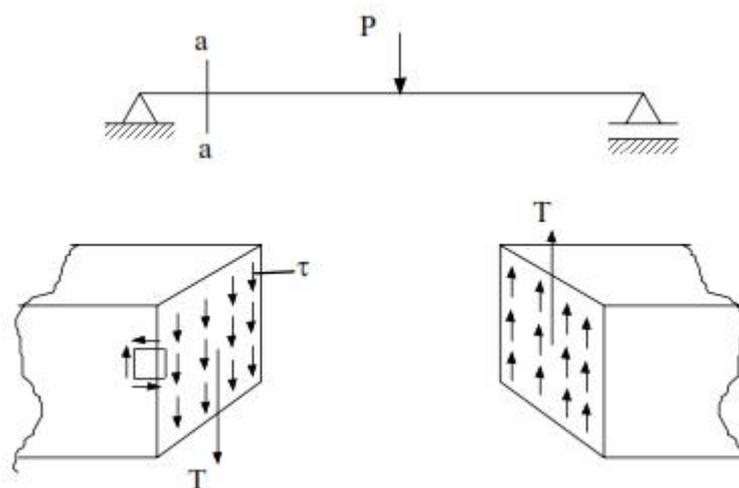


Figure 3.14 : Distribution des contraintes tangentielles.

Considérons un tronçon de poutre de longueur dx soumis à un effort tranchant constant T et un moment fléchissant variant de M à $M+dM$ (Figure 3.15).

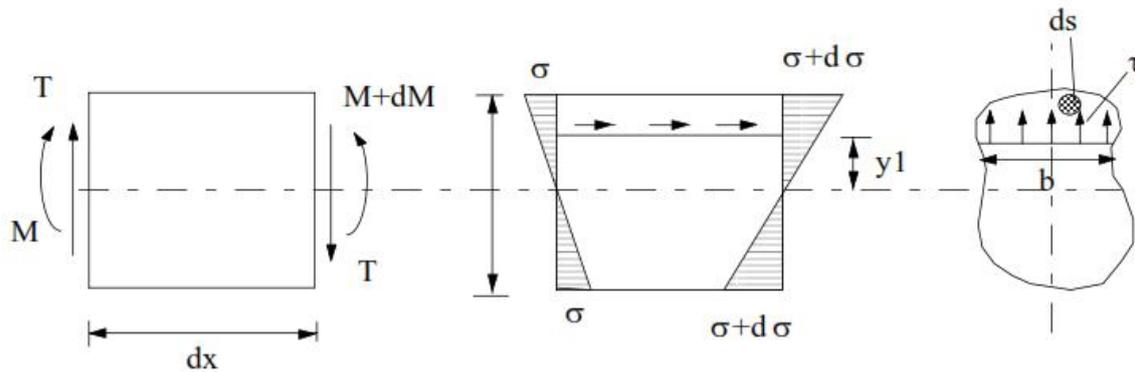


Figure 3.15 : Calcul des contraintes tangentielles.

La partie supérieure de l'élément dx à une distance y_1 de l'axe neutre est en équilibre sous l'action des contraintes σ à gauche de l'élément dx , $\sigma + d\sigma$ à droite de l'élément et de la contrainte tangentielle horizontale τ .

Ecrivons l'équation d'équilibre :

$$\int_{S_1} \sigma ds - \int_{S_1} (\sigma + d\sigma) ds + \tau b dx = 0 \tag{3.18}$$

En supposant que les contraintes tangentielles sont constantes dans la section $b dx$:

$$b dx = \int \int_{S_1} d\sigma ds = \int \int_{S_1} \frac{dM}{I} y ds \tag{3.19}$$

$$= \frac{dM}{I} \int \int_{S_1} y ds \tag{3.20}$$

$$= \frac{dM}{I} S_1^* \tag{3.21}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{dM}{dx} \frac{S_1^*}{I b} = \frac{T S_1^*}{I b} \tag{3.22}$$

En un point arbitraire d'une section droite d'une poutre soumise à l'action simultanée d'un effort tranchant et d'un moment fléchissant, la valeur de la contrainte tangentielle est déterminée par :

$$\tau = \frac{T S_z^*}{I_z b} \tag{3.23}$$

Avec :

: Contrainte tangentielle.

b : Largeur de la section dans la couche considérée.

I_z : Moment d'inertie.

S_z^* : Moment statique de l'aire située soit au-dessous soit au-dessus de la couche considérée.

T : L'effort tranchant.

La contrainte tangentielle varie avec l'ordonnée y comme le rapport S_z^*/b . est nul aux points des plus éloignés du centre de gravité est passe par un maximum pour l'ordonnée correspondant au maximum de S_z^*/b .

Exemple 04 :

Déterminer la distribution de la contrainte tangentielle de la poutre à section rectangulaire.

Solution 04 :

Dans le cas d'une section rectangulaire, la largeur b est constante. A une distance y de l'axe $z-z$ on détermine le moment statique S^* et le moment quadratique I_z . La formule (3.23) devient :

$$S_1 = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (3.24)$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

On obtient :

$$\tau = \frac{6T}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (3.25)$$

$$y = 0 \quad \tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{T}{bh}$$

$$y = h/2 \quad \tau_{min} = 0$$

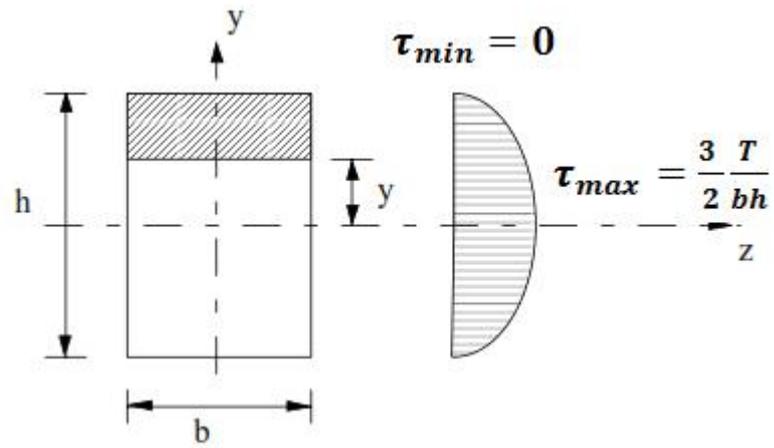
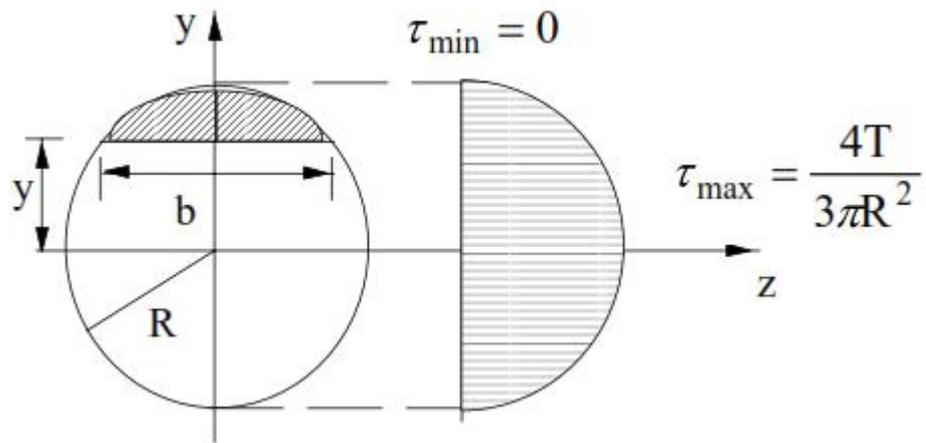


Figure 3.16 : Contraintes tangentielles pour section rectangulaire.

✓ Poutre à section circulaire



✓ Poutre à section triangulaire

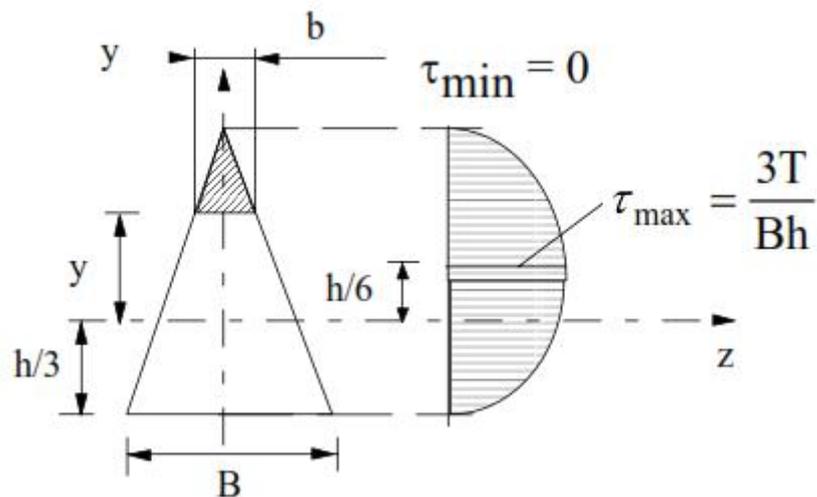


Figure 3.17 : Exemples de distribution des contraintes tangentielles dans une section de poutre en flexion simple.

3.8 Calcul de résistance en flexion simple

Dans le cas général d'une poutre en flexion simple, les valeurs maximales des contraintes normales et celle des contraintes tangentielles se trouvent en des points différents. Dans les points où σ est maximale $\tau = 0$, par contre là où τ est maximale $\sigma = 0$.

D'habitude on vérifie les contraintes normales et tangentielles séparément.

Comme le cas d'une flexion pure, la condition de résistance s'écrit :

$$|\sigma_{max}| = \frac{M_{max} y}{I} \leq [\sigma] \quad (3.26)$$

On devra aussi vérifier :

$$\tau_{max} = \frac{T_{max} S_{max}^*}{bI} \leq [\tau] \quad (3.27)$$

Cependant dans le cas où dans des sections de poutre il existe des points supportant l'action simultanée d'importantes contraintes normales et tangentielles, il convient de vérifier la résistance de la poutre par rapport aux contraintes principales, en utilisant les diverses théories de résistance.

3.9 Déformée d'une poutre soumise à la flexion simple (notion de la flèche)

Quand on charge une poutre, la ligne moyenne qui, initialement est droite, se déforme sous l'effet d'un moment fléchissant. L'allure de l'axe longitudinale de la poutre après flexion (déformé) est appelée ligne élastique.

On s'intéresse au calcul des déformations élastiques à la flexion pour pratiquement deux raisons :

- ✓ Calcul à la rigidité : en plus de calcul à la résistance, on doit parfois vérifier que la flèche de la poutre ne dépasse pas la valeur de la flèche maximale permise.
- ✓ Le calcul des déformations est essentiel pour l'analyse des systèmes hyperstatiques.

3.9.1 Equation différentielle de la ligne élastique

L'expression de l'équation de la déformation peut être facilement obtenue à partir de la relation entre la courbure et le moment fléchissant :

$$\frac{1}{R} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (3.28)$$

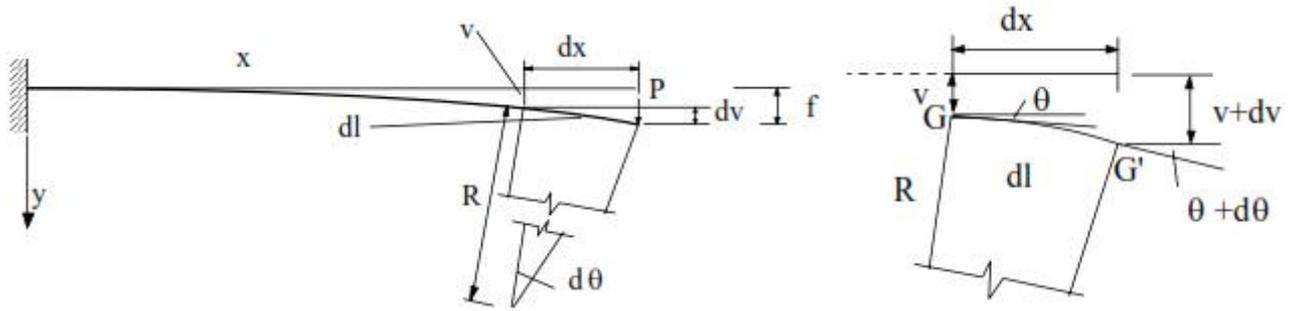


Figure 3.18 : Poutre déformée.

L'arc GG' ayant pour longueur dl :

$$dl = R d\theta \tag{3.29}$$

$$\text{ou } \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dl} \tag{3.30}$$

La tangente de la courbure v au point x est définie par :

$$\frac{dv}{dx} = \text{tg}\theta \tag{3.31}$$

Pour des angles de rotations très petits on assimile :

$$\text{tg} = \tag{3.32}$$

$$\text{et } dx - dl \tag{3.33}$$

En remplaçant (3.32) et (3.33) par leurs valeurs dans (4.30) et (4.31) on obtient :

$$\text{ou } \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} \tag{3.34}$$

$$\text{et } \theta = \frac{dv}{dx} \tag{3.35}$$

En dérivant (4.35) par rapport à x :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \tag{3.36}$$

Des équations (3.34) et (3.36), il en résulte :

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \tag{3.37}$$

L'équation (3.28) s'écrira donc :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (3.38)$$

C'est l'équation différentielle de la ligne élastique que l'on intègre dans chaque cas particulier afin de déterminer les flèches des poutre.

Le signe dans l'équation (3.38) correspond à :

1. x et v sont positif dans la droite et vers le bas respectivement.
2. L'angle est positif dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de l'axe x .
3. M positif quand il tend les fibres inférieures.
4. La courbure est positive si la courbe est concave vers le bas ($M > 0$ et $1/R > 0$).

3.9.2 Méthode d'intégration directe

L'équation de la déformée peut être obtenue par intégration successive de l'équation différentielle (4.38)

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \int -\frac{M(x)}{EI} dx + C_1 \quad (3.39)$$

En intégrant une seconde fois il vient :

$$v(x) = \int \left[\int -\frac{M(x)}{EI} dx + C_1 \right] dx + C_2 \quad (3.40)$$

Où C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration à déterminer à partir des conditions aux limites.

Il faut noter que dans le cas des poutres ayant plusieurs tronçons dont chacun possède sa propre équation du moment, il faut substituer l'expression de M dans chacune des équations différentielles et procéder à l'intégration. Les constantes d'intégration dans ce cas sont déterminées en utilisant les conditions aux appuis des extrémités de la poutre et aux conditions de continuité aux limites des tronçons.