

CHAPITRE 2

TORSION

2.1 Définition

La torsion est une charge telle que dans les sections droites de la barre seul apparaît un moment de torsion (Figure 2.1). Les autres facteurs, moments fléchissants, force normale et effort tranchant, sont nuls.

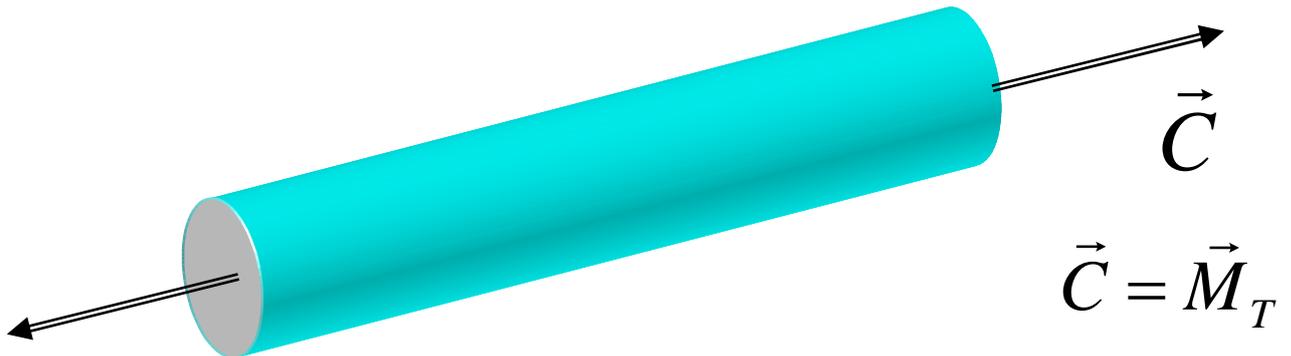


Figure 2.1 : Exemple d'une barre soumise à la torsion.

Supposons que la barre est chargée seulement par un couple situé dans le plan perpendiculaire à l'axe de la barre.

Coupons la barre et considérons l'équation de la partie droite. On peut voir que :

$$\mathbf{N} = \mathbf{T}_z = \mathbf{T}_y = \mathbf{M}_z = \mathbf{M}_y = \mathbf{0}$$

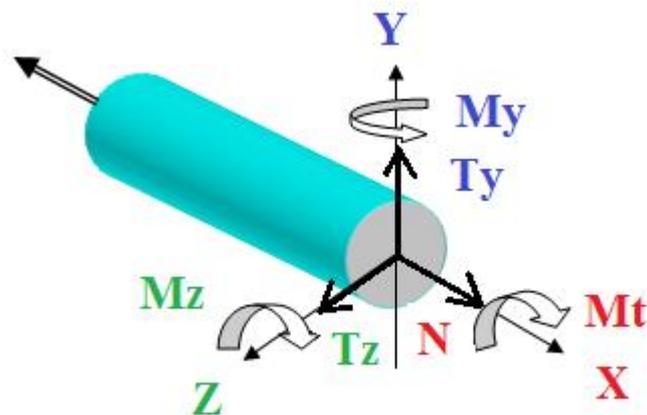


Figure 2.2 : Efforts internes dans une barre.

La seule force intérieure avec laquelle la partie gauche agit sur la partie droite est le moment intérieur M_t . Ce moment s'appelle le moment de torsion, il se trouve dans le plan de la section.

Ce type de sollicitation est très répandu dans les structures de mécanique et surtout au niveau des arbres entraînés par les moteurs. L'analyse des éléments des structures de génie civil soumise à la torsion est moins fréquente car l'existence du moment de torsion entraîne que les forces extérieures doivent obligatoirement appartenir à un plan perpendiculaire à celui de l'élément, et cela n'est pris en compte que lors de l'analyse des structures en 3-dimensions, comme par exemple l'installation de tuyauterie d'un système de refroidissement d'une centrale nucléaire ou d'une base de pompage de pétrole (Figure 2.3).

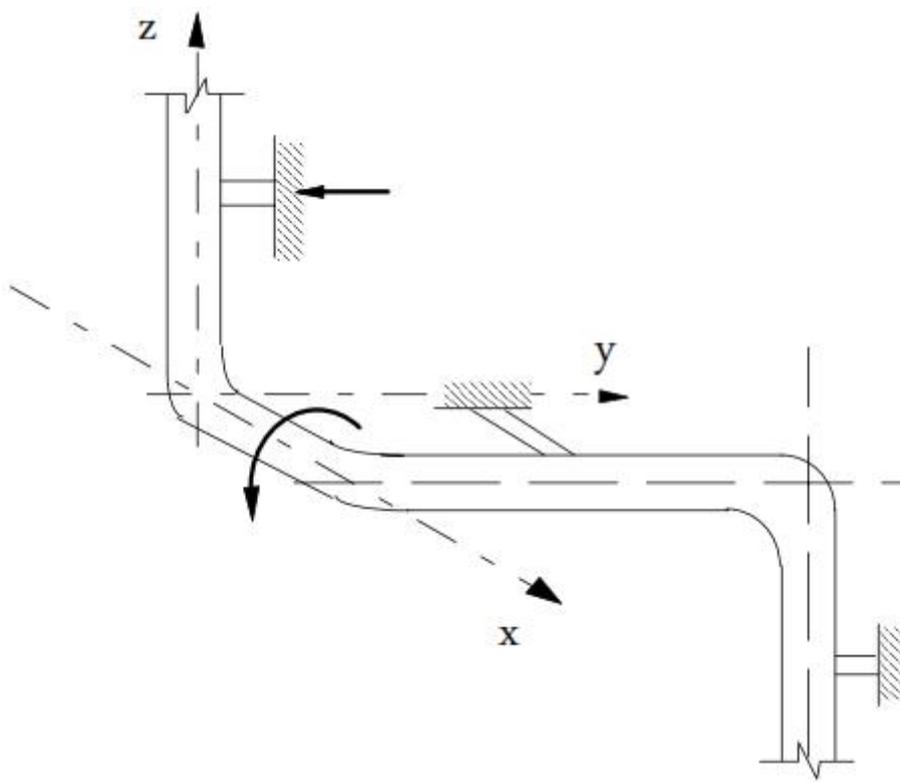


Figure 2.3 : Système soumis à la torsion.

2.2 Convention de signe et diagramme du moment de torsion

Par convention, le moment de torsion (effort interne) est:

- Positif ($M_t > 0$) s'il agit dans le sens antihoraire pour un observateur qui regarde la section ;
- négatif ($M_t < 0$) s'il agit dans le sens horaire pour un observateur qui regarde la section.

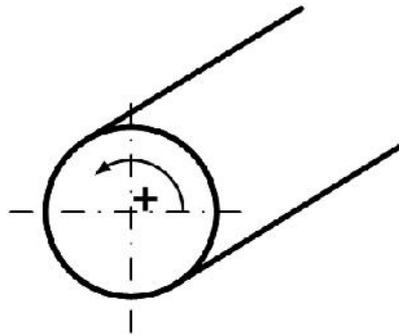


Figure 2.4 : Convention de signe.

Le moment de torsion agissant en un point d'une barre est égal à la somme algébrique des moments des couples extérieurs appliqués d'un côté ou de l'autre de la partie considérée.

2.3 Contraintes et déformations

Comme pour les sollicitations en traction / compression, une sollicitation en torsion entraîne une déformation comme le montre sur la Figure 2.5. Cette propriété est d'ailleurs utilisée pour réaliser des suspensions à barre de torsion.

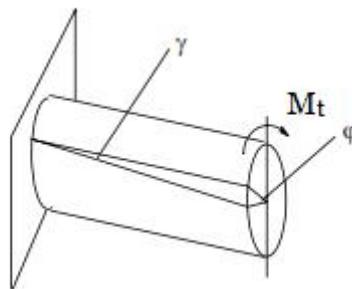


Figure 2.5 : Déformation de la barre.

Considérons une barre de section circulaire soumise à un moment de torsion constant M_t (Figure 2.6). Coupons un élément de longueur (dx).

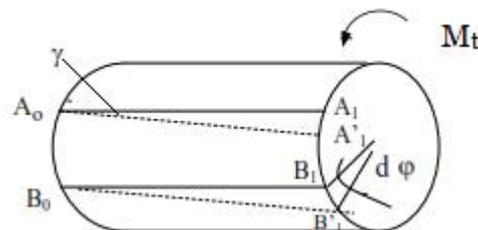
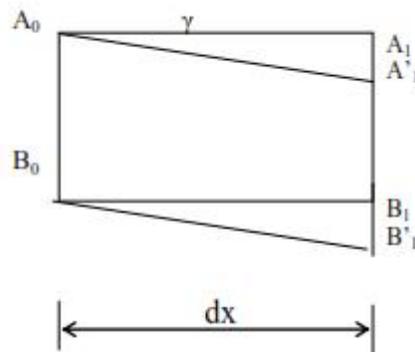


Figure 2.6 : Élément d'une barre soumise à la torsion.

Si on développe en plan le rectangle $A_0A_1B_1B_0$, on constate qu'il se déforme en parallélogramme :



L'angle de déformation est appelé : distorsion exprimé par :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{A_1 A'_1}{A_0 A_1} \quad (2.1)$$

$$A_1 A'_1 = r d \quad \text{et} \quad A_0 A_1 = dx$$

En tenant compte du fait que l'angle γ est petit on assimilera $\operatorname{tg} \gamma$ à γ et on obtient alors :

$$= r \frac{d\varphi}{dx} \quad (2.2)$$

$\frac{d\varphi}{dx}$ est l'angle de torsion par unité de longueur qui est constante et on la note par θ de sorte :

$$= r \theta \quad (2.3)$$

On peut écrire une deuxième expression de la loi de Hooke sous la forme :

$$\tau_M = G \cdot \chi \quad (2.4)$$

Où G est le module d'élasticité transversal (ou module de Coulomb).

En remplaçant la déformation de cisaillement par son expression, on obtient :

$$\tau_M = r \cdot G \cdot \theta \quad (2.5)$$

Pour calculer les contraintes de cisaillement dans la barre on utilise, au lieu du rayon r , la coordonnée polaire ρ au point considéré (Figure 2.7).

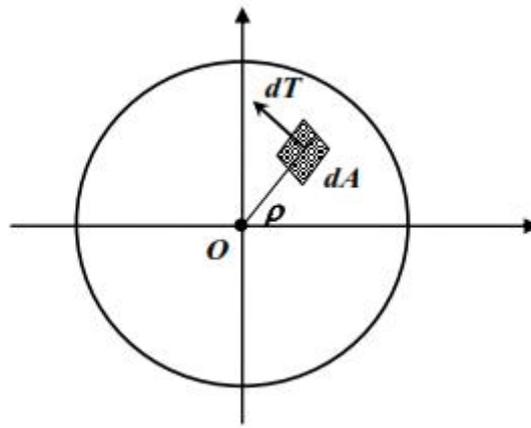


Figure 2.7 : Force de cisaillement en un point d'une section.

La force élémentaire agissant sur la surface dA est :

$$dT = \tau \cdot dA$$

Cette force fait naître un moment de torsion élémentaire dM_t :

$$dM_t = \rho \cdot dT$$

Ainsi, le moment de torsion est :

$$M_t = \int_A \tau \rho \, dA \quad (2.6)$$

En substituant τ par son expression (2.5)

$$M_t = \int_A G \cdot \theta \rho^2 \, dA \quad (2.7)$$

Finalement, la relation entre le moment de torsion et l'angle :

$$M_t = G \cdot \theta \int_A \rho^2 \, dA \quad (2.8)$$

On reconnaît dans cette expression le moment quadratique polaire :

$$I_P = \int_A \rho^2 \, dA \quad (2.9)$$

D'où l'expression de la déformation angulaire relative :

$$M_t = G \cdot \theta \cdot I_P \quad (2.10)$$

La quantité $G I_P$ est la rigidité à la torsion.

Des relation (2.3), (2.4) et (2.10), on tire

$$\tau = \frac{M_t}{I_P} \rho \quad (2.11)$$

Cette formule montre que les contraintes sont proportionnelles à la distance du point considéré au centre de gravité de la section. On peut alors tracer le graphe de répartition de la contrainte dans une section (Figure 6.8) . La contrainte tangentielle est maximale sur les fibres extérieures :

$$\text{Pour } \rho = R \quad \tau_{max} = \frac{M_t}{I_P} R \quad (2.12)$$

La quantité $W_P = \frac{I_P}{R}$ est appelée module de torsion.

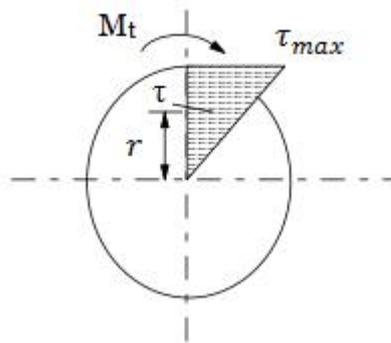


Figure 2.8 : Distribution des contraintes de cisaillement dans une section soumise à la torsion.

L'angle de rotation d'une poutre de longueur L peut être obtenu de l'expression (6.13) :

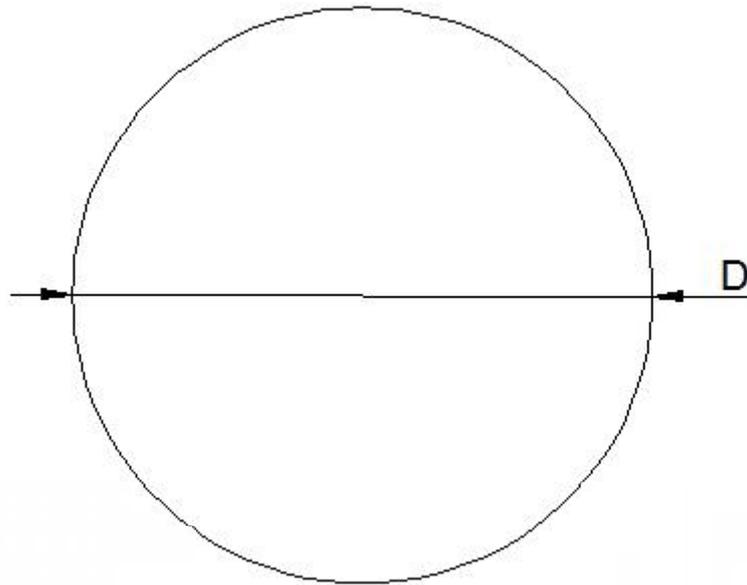
$$\varphi = \int_0^L \frac{M_X}{G I_P} dx \quad (2.13)$$

Si la forme de la section et le moment sont constants alors :

$$\varphi = \frac{M_t L}{G I_P} \quad (2.14)$$

➤ Exemples de Calcul des modules de résistance polaires

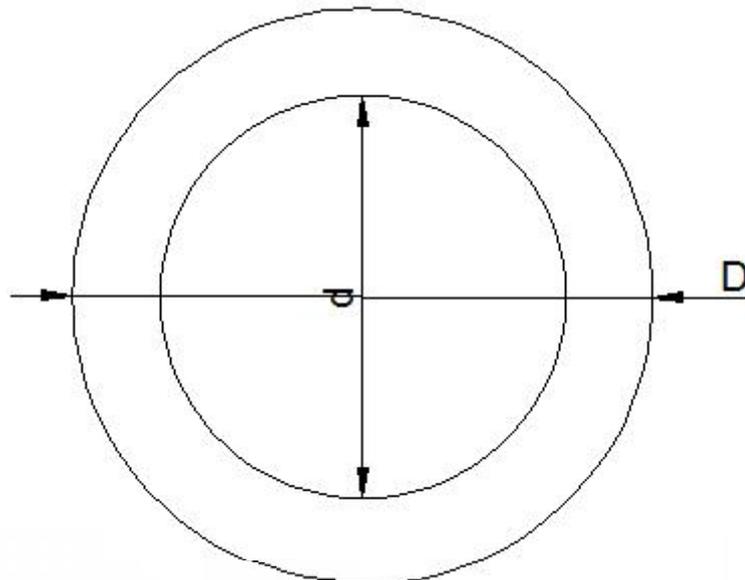
a. Section circulaire pleine



$$I_P = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$W_P = \frac{\pi D^3}{16}$$

b. Section circulaire tubulaire



$$I_P = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$$

$$W_P = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16 D}$$

2.4 Torsion d'une barre à section transversale non circulaire

L'hypothèse des sections planes ne peut être admise lors de la torsion des sections non-circulaires et donc les méthodes de la résistance des matériaux ne peuvent pas être appliquées.

Dans ce paragraphe, on utilisera les formules obtenues par les méthodes de la théorie d'élasticité pour le cas des sections non circulaires.

La distribution des contraintes d'une section non circulaire est représentée dans la figure ci-dessous (Figure 2.9) et la contrainte maximale est donnée par la formule :

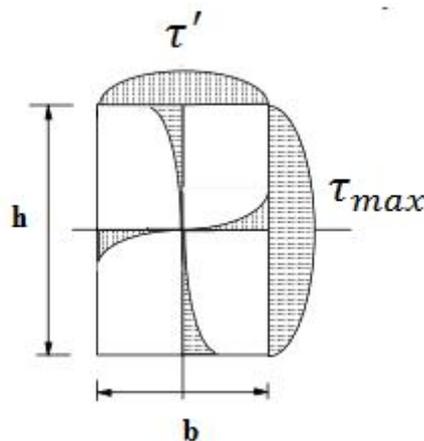


Figure 2.9 : Contrainte de cisaillement dans une section non circulaire.

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \quad (2.15)$$

W_t est appelé module de résistance à la torsion et il est différent du module de résistance polaire W_p sauf pour les sections circulaires et s'exprime par la relation:

$$w_t = \alpha h b^2 \quad (2.16)$$

Tels que h et b sont les dimensions de la section avec $h > b$.

$$\tau' = \beta \tau_{max} \quad (2.17)$$

Et l'angle de rotation se calcule dans ce cas par l'expression :

$$\varphi = \frac{M_t L}{G I_t} \quad (2.18)$$

Où I_t est donnée par

$$I_t = h b^2 \quad (2.19)$$

Les coefficients α , β et γ sont donnés en fonction du rapport h/b dans le Tableau suivant :

Tableau 2.1 : Valeurs des coefficients α , β et γ en fonction du rapport h/b

h/b	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	10	
	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,313	0,333
	1,0	0,859	0,820	0,795	0,766	0,766	0,753	0,745	0,742	0,742
	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,313	0,333

2.5 Calcul de résistance à la torsion

En plus de la condition de résistance, lors du calcul des barres à la torsion ; on vérifie aussi la condition de rigidité. Les deux conditions s'écrivent donc :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \leq [\tau] \quad (2.20)$$

$$\varphi_{max} = \frac{M_t L}{G I_t} \leq [\varphi] \quad (2.21)$$

On admet généralement $[\varphi] = 0,3^\circ / 1 \text{ m}$ de longueur.