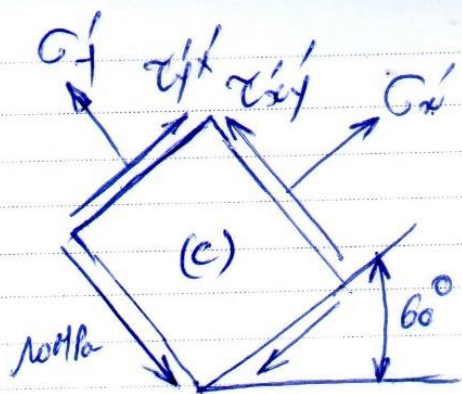




$$\sigma_{x'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$= \frac{1}{2}(0+0) + \frac{1}{2}(0-0) \cos 2(-60) + 10 \sin 2(-60) = -5\sqrt{3} \text{ MPa}$$

$$\sigma_{y'} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$= \frac{1}{2}(0+0) - \frac{1}{2}(0-0) \cos 2(-60) - 10 \sin 2(-60) = 5\sqrt{3} \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$= -\frac{1}{2}(0-0) \sin 2(-60) + 10 \cos 2(-60) = -5 \text{ MPa}$$

8- Contraintes principales: Les contraintes $\sigma_{x'}$, $\tau_{x'y'}$ précédents valent de façon combinée avec l'angle θ en conception des machines la connaissance des valeurs maximales de ces contraintes est nécessaires pour faire des choix ou des déterminations.

Les valeurs extrêmes des contraintes sont appelées contraintes principales.

a) Détermination: Dérivons la contrainte $\sigma_{x'}$ par rapport à l'angle θ .

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta$$

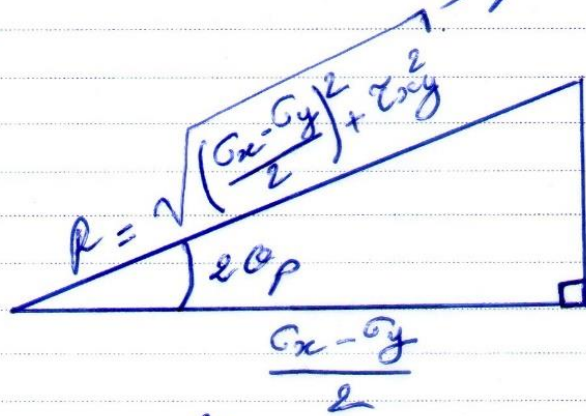
$\sigma_{x'}$ atteint sa valeur maximale lorsque sa dérivée est nulle. Notons θ_p l'angle θ donnant la direction des axes principaux.

$$-(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

$$-(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta = -2\tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Si σ_x' est maximale, parallèlement σ_y' est minimale



$$\cos 2\theta_p = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

$$\sin 2\theta_p = \tau_{xy} / R$$

fig. 1

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R = \sigma_{\text{moy}} + R = \sigma_{\text{maxi}}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R = \sigma_{\text{moy}} - R = \sigma_{\text{min}}$$

Comme $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$

$$\tau_{x'y'} = - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta_p + \tau_{xy} \cos 2\theta_p$$

$$\tau_{x'y'} = - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \frac{\tau_{xy}}{R} + \tau_{xy} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} = 0$$

* Autrement dit, lorsque σ_x' est maximale, $\tau_{x'y'}$ est nulle. Pour les axes principaux, l'élément est soumis à des contraintes biaxiales et les contraintes tangentielles sont nulles.

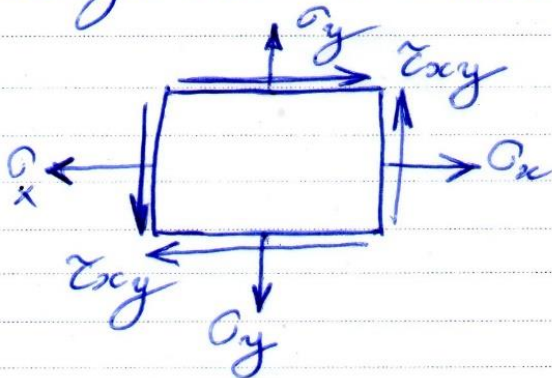
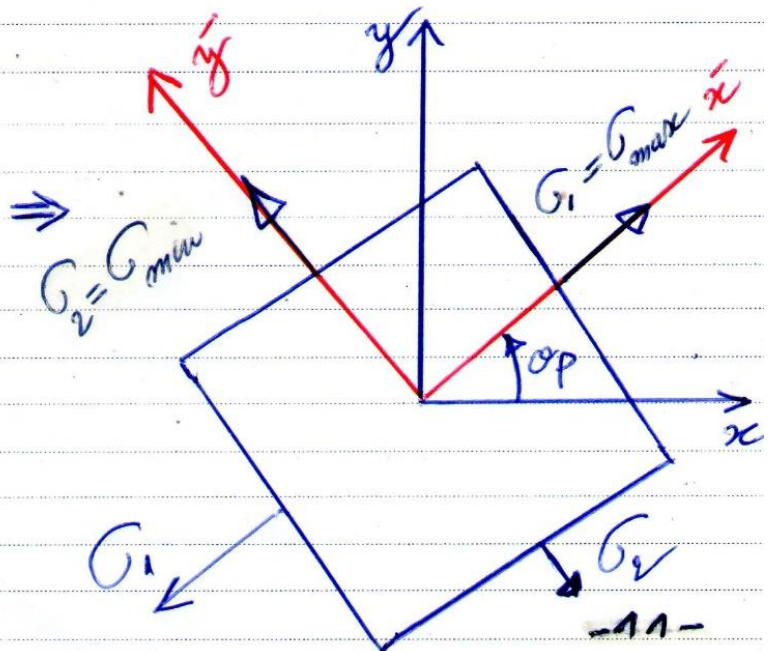
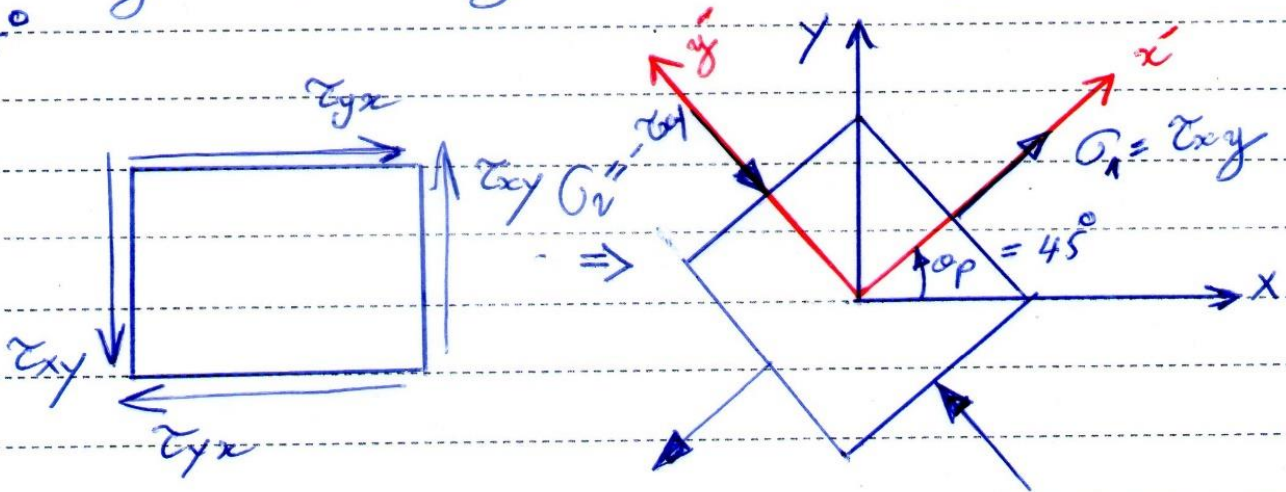


fig. 2



* **Cas particuliers :** en traction et en contraintes biaxiales, les axes principaux sont les axes x et y de départ ($\sigma_p = 0$)
 - en cisaillement pur ($\sigma_x = \sigma_y = 0$), $\sigma_p = 45^\circ$, $R = \tau_{xy}$, $\sigma_1 = \tau_{xy}$ et $\sigma_2 = -\tau_{xy}$. les axes principaux sont à 45°



9. **Contrainte de Cisaillement maximale :** la contrainte $\tau_{x'y'}$ est maximale lorsque sa dérivée est nulle. Celle-ci est nulle $\theta = \theta_c$:

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta = 0$$

$$\text{d'où : } \tan 2\theta = \frac{-\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\tan 2\theta_c = -\frac{1}{\tan 2\theta_p}$$

$$\theta_c = \theta_p \pm 45^\circ$$

- la contrainte de cisaillement maximale apparaît dans une direction faisant 45° avec les axes des contraintes principales. on obtient :

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = R$$

Remarque: $\tau_{min} = -\tau_{max}$ pour $\theta = \theta_c$; $\sigma'_x = \sigma_y$

$$\sigma_{moy} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

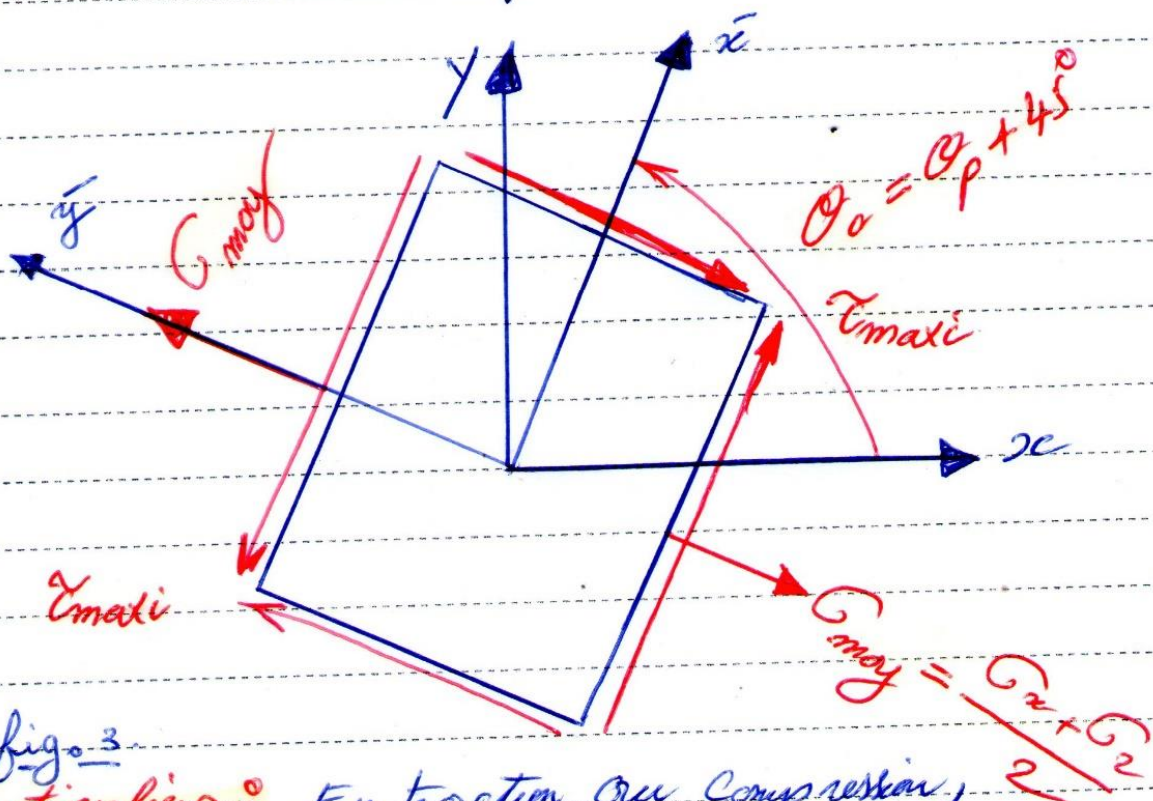
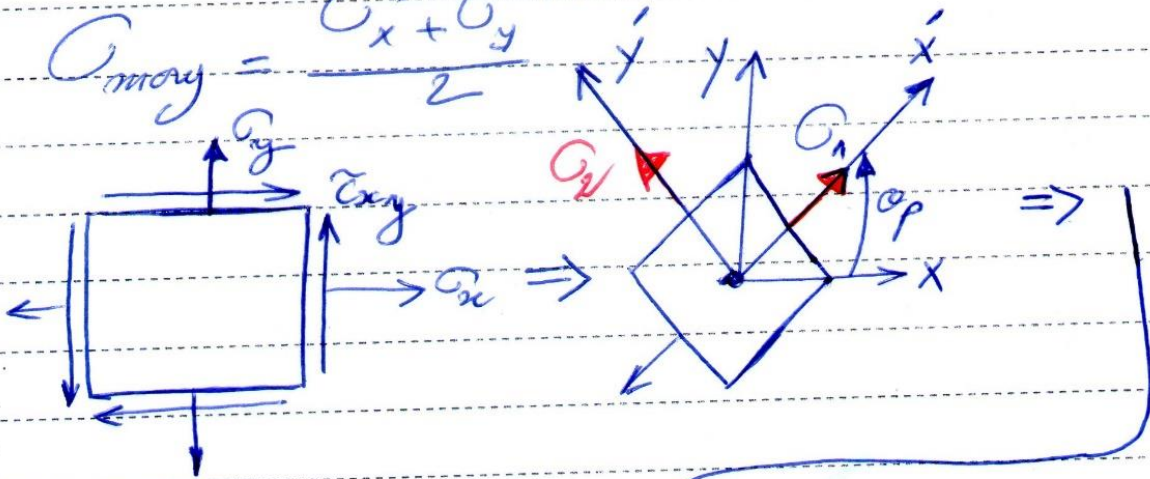


fig. 3

Cas particuliers: En traction ou compression, la contrainte de cisaillement maximale apparaît dans une direction à 45° par rapport aux axes X et Y .

- En cisaillement pur, les contraintes de cisaillement sont maximales et les axes X et Y.

Exemple : Reprenons l'exemple de la navette et déterminons les contraintes principales et la contrainte de cisaillement maximale.

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 28}{110 - 40} = 19,32^\circ$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{110 - 40}{2}\right)^2 + 28^2}$$

$$R = 44,82 \text{ MPa}$$

$$* \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R = \frac{110 + 40}{2} + 44,82 = 119,82 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \sigma_{1 \text{ max}} = 119,82 \text{ MPa}$$

$$* \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R = \frac{110 + 40}{2} - 44,82 = 30,18 \text{ MPa}$$

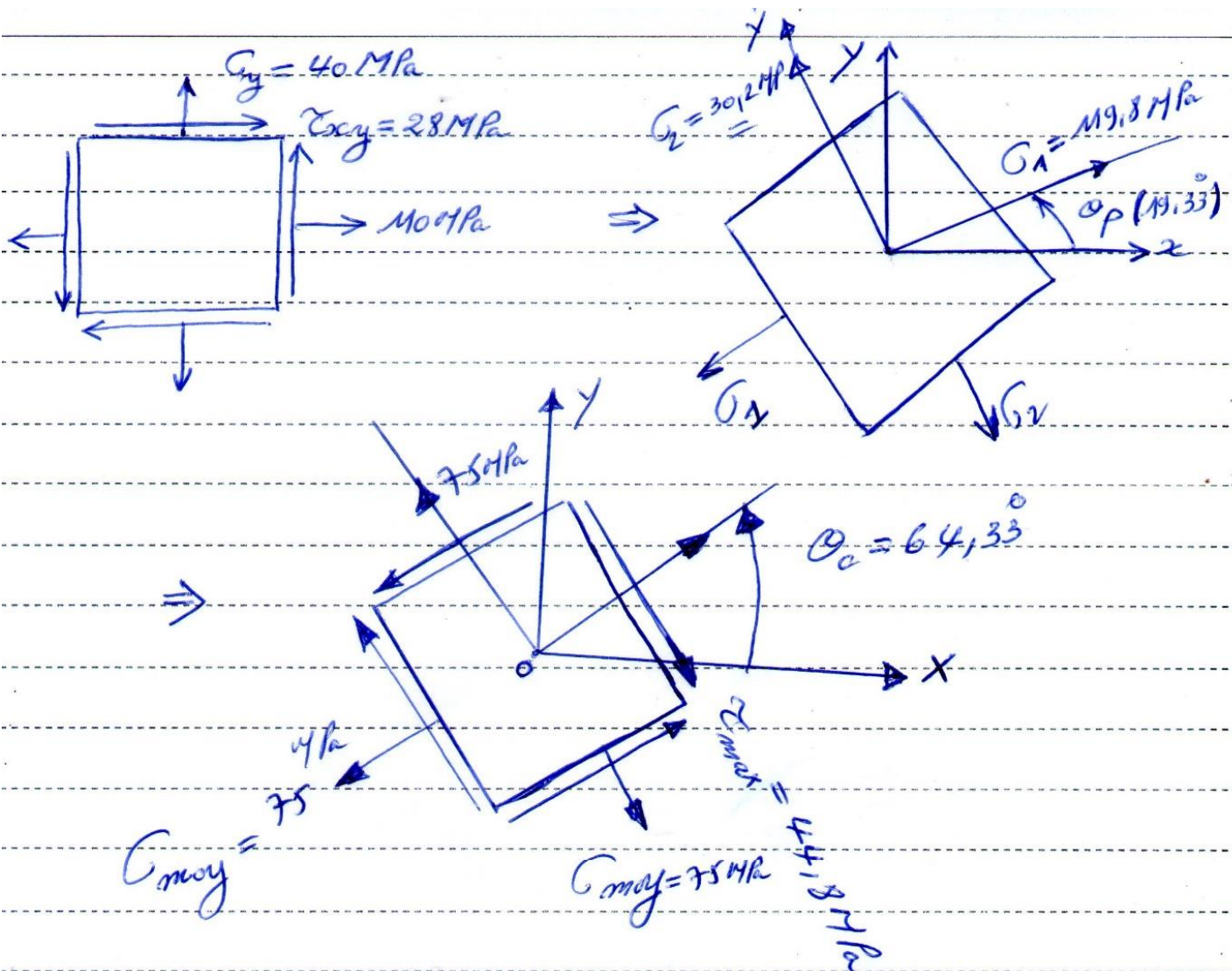
$$* \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y \Leftrightarrow 119,82 + 30,18 = 110 + 40$$

* La contrainte de cisaillement maximale :

$$\tau_{\text{max}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = R = 44,82 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\text{min}} = -44,82 \text{ MPa et } \theta = \theta_c ; \theta_c = \theta_p + 45$$

$$\theta_c = 19,32 + 45 = 64,32^\circ$$



* **Exercice :** Les contraintes en un point M de la structure de Bateau sont (Après mesures expérimentales) : $\sigma_x = 14 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 4 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 10 \text{ MPa}$.

* Déterminons la valeur des contraintes dans une direction de θ entre $(0 \div 360^\circ)$.

* Les contraintes $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$, $\tau_{x'y'}$ exercées sur les faces du parallélépipède lorsque l'on tourne celui-ci de l'angle θ entre $(0 \div 360^\circ)$.

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (1)$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (2)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (3)$$

$$① \Leftrightarrow \sigma'_x = \frac{14+4}{2} + \frac{14-4}{2} \cos 2\theta + 10 \sin 2\theta$$

$$① \Leftrightarrow \sigma'_x = 9 + 5 \cos 2\theta + 10 \sin 2\theta$$

$$① \Leftrightarrow \frac{d\sigma'_x}{d\theta} = 0 \Rightarrow -10 \sin 2\theta + 20 \cos 2\theta = 0$$

$$\Rightarrow -10 \sin 2\theta = -20 \cos 2\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{+20}{+10} = 2$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta = 2 \Rightarrow 2\theta = \arctan 2$$

$$\Rightarrow 2\theta = 63,43 \Rightarrow \boxed{\theta = 31,71^\circ}$$

$$* R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{14-4}{2}\right)^2 + 10^2} = \boxed{11,18 \text{ MPa}}$$

$$* \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R = \frac{14+4}{2} + 11,18 = \boxed{20,18 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_1 = \sigma'_{x_{\max}} = \boxed{20,18 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R = \frac{14+4}{2} - 11,18 = \boxed{-2,18 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_2 = \sigma'_{y_{\min}} = \boxed{-2,18 \text{ MPa}} \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\Rightarrow 20,18 - 2,18 = 14 + 4 \Rightarrow \boxed{18 = 18}$$

La contrainte de cisaillement maximale:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = R = \boxed{11,18 \text{ MPa}}$$

$$-16- \sigma_c = \sigma_p + 45 = 31,71 + 45 = \boxed{76,71}$$

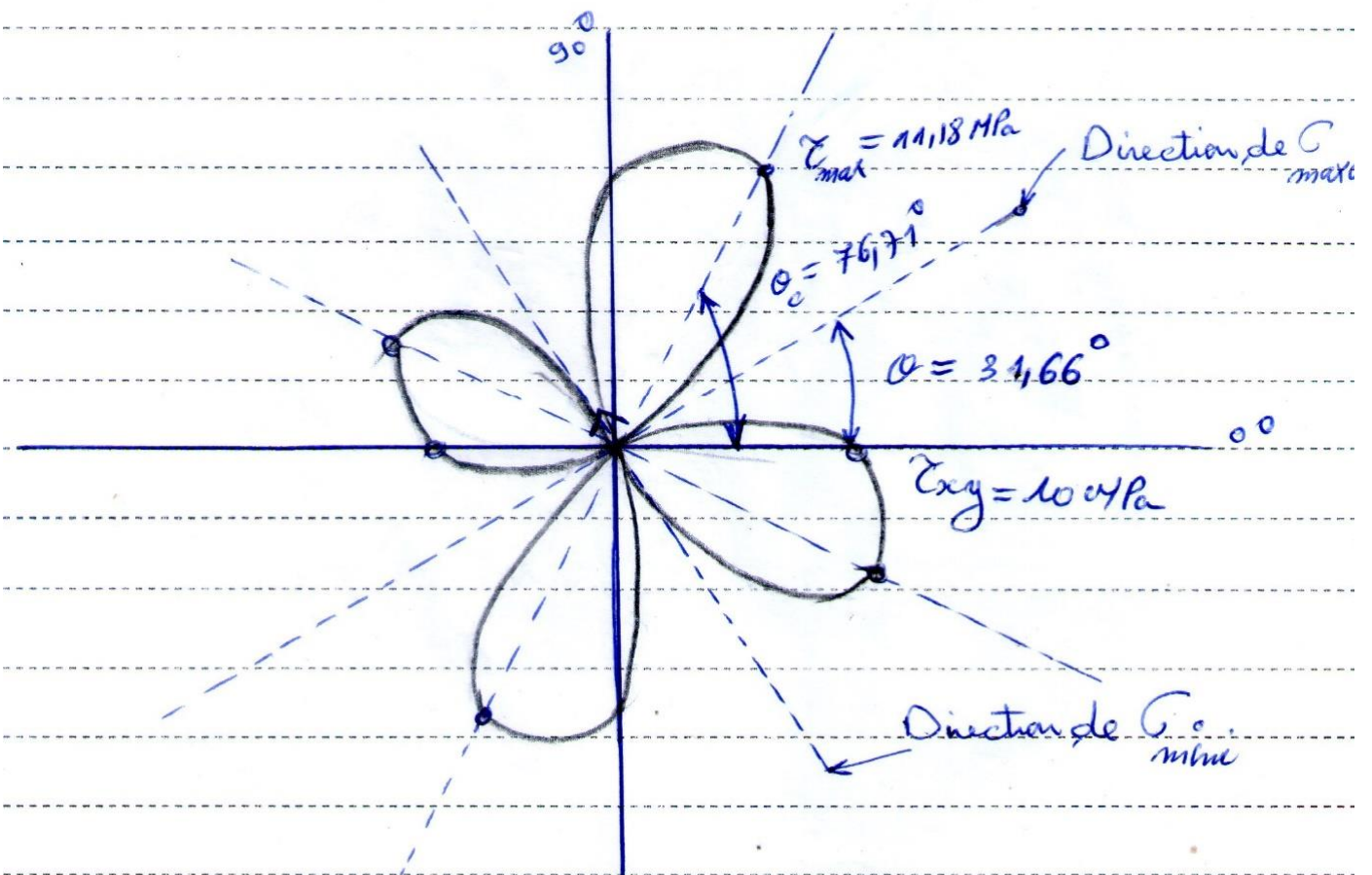
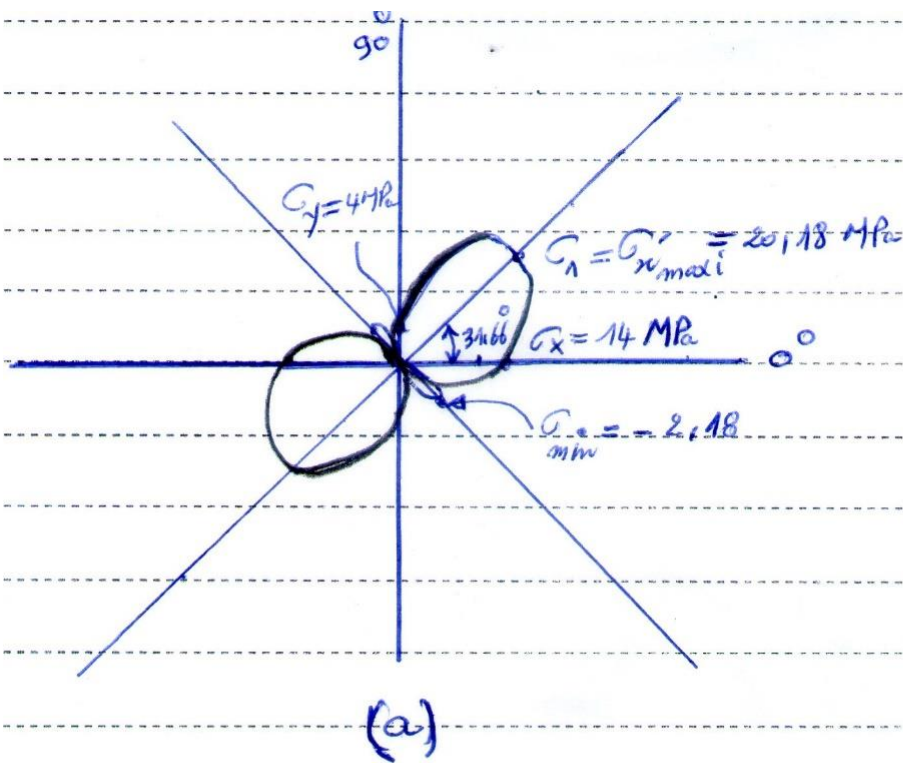


fig 4: représentation polaire de σ'_x et σ'_y et τ_{xy} .

10- Cercle de Mohr contraintes planes: cette représentation graphique, universellement utilisée (elle fait partie des « bibliothèques » de nombreuses calculatrices de poche) permet de visualiser les relations existant entre les contraintes.

- La théorie fut développée en 1882 par Otto Mohr (1835-1918), ingénieur allemand.

- Écrivons les équations de transformations du paragraphe ① sous la forme :

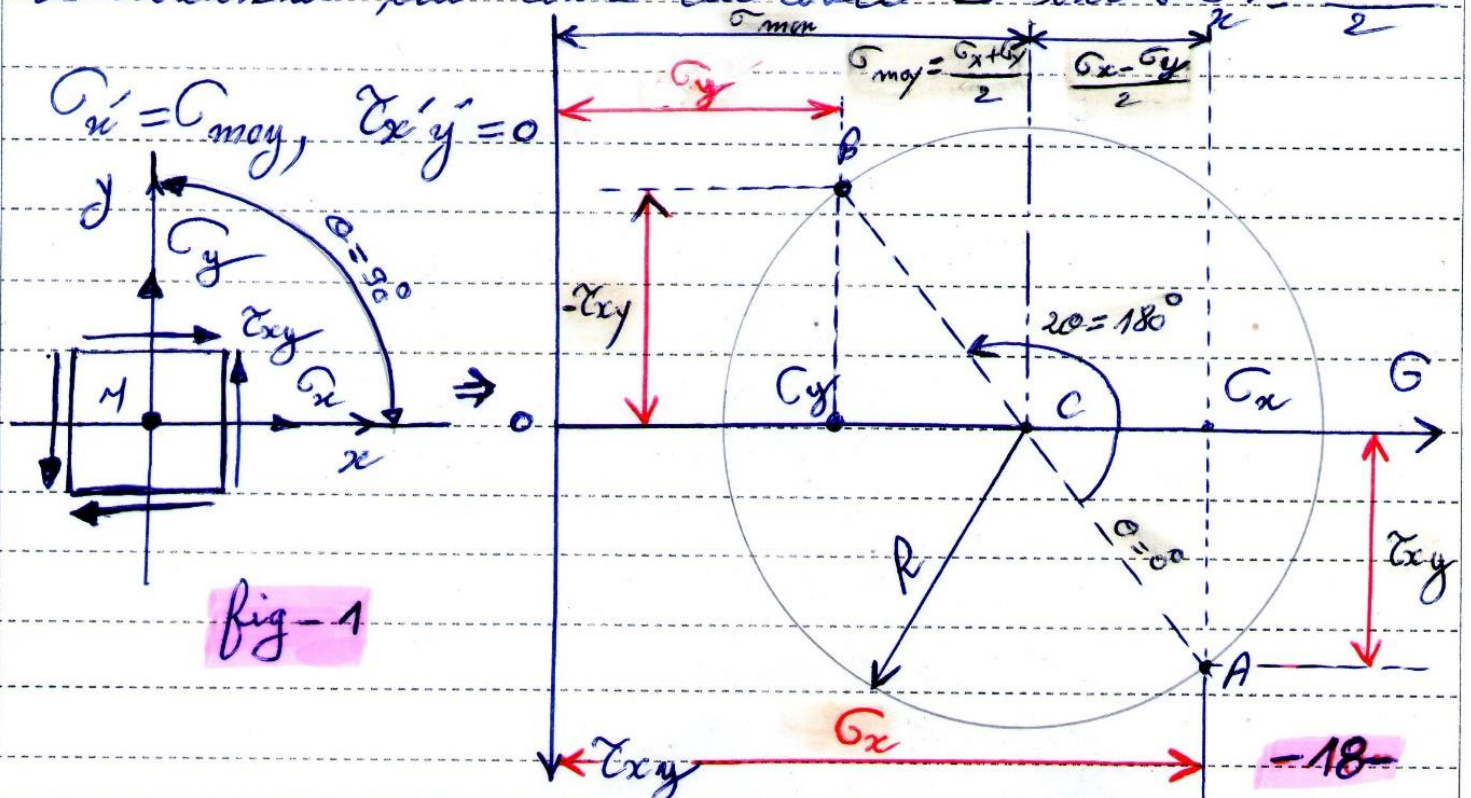
a) **contrainte de cercle :**

$$\begin{cases} \sigma'_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau'_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{cases} \quad (1)$$

$$\left(\sigma'_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau'^2_{xy} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2$$

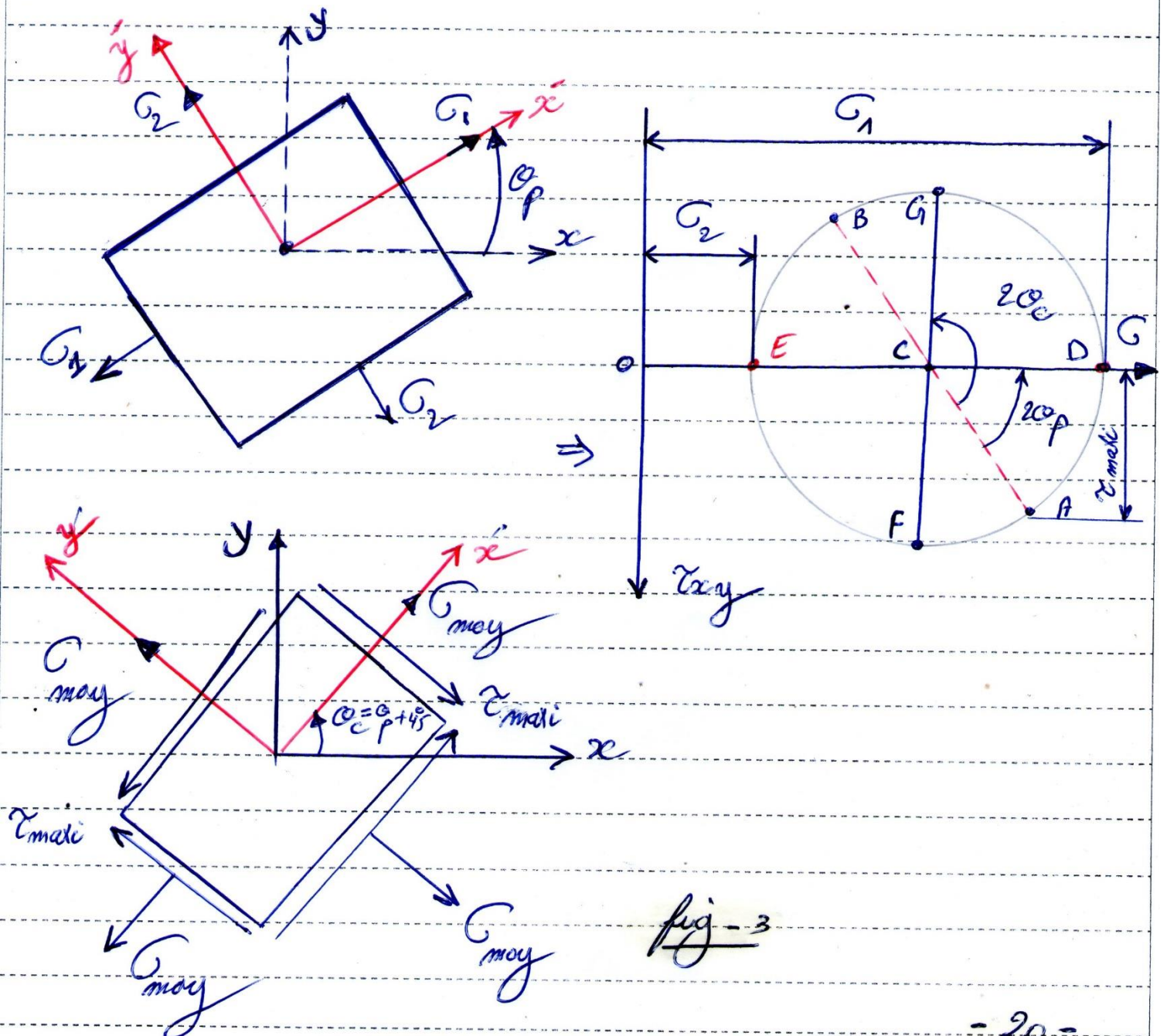
* Équation d'un cercle ayant σ'_x et τ'_{xy} comme coordonnées et pour rayon R .

les coordonnées du centre du cercle C sont : $\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$



Remarque : Le cercle de Mohr représente l'état des contraintes en un point, une fois établi, il permet de déterminer les contraintes dans n'importe quelle direction (θ) choisie et en particulier les contraintes principales et la contrainte de cisaillement maximale. Lorsque $\theta = 90^\circ$, A devient B et on retrouve les contraintes σ_y et $-\tau_{xy}$ dans la direction perpendiculaire.

C) Détermination des contraintes principales et de la contrainte de cisaillement maximale :



- Les contraintes principales correspondent aux points d'intersection D et E du cercle avec l'axe σ pour lesquelles $\tau_{xy} = 0$, elles sont définies dans la direction θ_p (θ_p étant la moitié de l'angle ACD).

- la contrainte de cisaillement maximale apparaît en F et G pour $\theta_c = \theta_p \pm 45^\circ$. en G, $\theta_c = \theta_p + 45^\circ$ et $\tau_G = -\tau_{max}$, en F, $\theta_c = \theta_p - 45^\circ$ et $\tau_F = \tau_{max}$.

Exemple 8 Reprenons l'exemple de la navette spatiale des paragraphes précédents:

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 75 \text{ MPa}, R = 44,8 \text{ MPa}, 2\theta_p = 39^\circ (\theta_p = 19,5^\circ), \theta_c = \theta_p \pm 45^\circ$$

