Chapitre IV: simplification d'une fonction logique :

1-simplification d'une fonction logique :

La simplification d'une fonction consiste à obtenir son expression la plus compacte possible afin de minimiser le nombre d'opérateurs logiques nécessaires à sa réalisation.

On distingue trois méthodes de simplification :

1.1. Simplification algébrique :

Les théorèmes de l'algèbre de Boole étudiés précédemment peuvent nous être utiles pour simplifier une expression logique. Exemple :

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= AB\overline{C} + A\overline{B}C + ABC \\ &= AB(\overline{C}+C) + A\overline{B}C \\ &= AB + A\overline{B}C \\ &= A(B + \overline{B}C) \\ &= A((B+\overline{B})(B+C)) \\ &= AB + AC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(A,B,C) &= \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{B} + \overline{A}B \\ &= \overline{B}(\overline{A}+A) + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B \\ &= \overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B \\ &= \overline{B} + \overline{A}(\overline{B}+B) \\ &= \overline{B} + \overline{A} \end{aligned}$$

2.2. Simplification par tableau de Karnaugh (Méthode graphique) :

Cette méthode repose sur l'utilisation des tableaux de Karnaugh.

a. Tableau de Karnaugh

C'est une table de vérité à deux dimensions. L'intersection d'une ligne avec une colonne constitue une case. Les variables sont divisées en deux groupes: des variables lignes et des variables colonnes. Le tableau est construit tel que deux cases adjacentes correspondent à deux combinaisons adjacentes. Voilà des exemples de tableaux de Karnaugh représentants 2, 3, 4 ou 5 variables logiques d'entrée:

X / Y	0	1
0		
1		

Tableau à 2 variables

XY / Z	00	01	11	10
0				
1				

Tableau à 3 variables

XY / ZT	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Tableau à 4 variables

XYZ / TU	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01								
11								
10								

Tableau à 5 variables

On utilise obligatoirement le code Gray

b. Règles de regroupement

1. On ne regroupe que les points vrais de la fonction qui sont adjacents (contenant des 1).

2. On ne peut regrouper que 2k cases adjacentes (nombre pair).

3. Un point vrai peut être utilisé plusieurs fois dans des groupements différents.

4. On doit utiliser au moins une fois tout les points vrais de la fonction.

5. On doit rechercher les groupements les plus grands possible pour minimiser le nombre des variables.

6. Si une fonction est exprimée avec N variables, un regroupement de 2^k cases conduit à un terme produit simplifié de (N – k) variables. Les k variables éliminés sont celle qui ont varié dans le regroupement.

7. La fonction simplifiée est la réunion des différents regroupements.

c. Principe de simplification

- Réaliser des groupements de ‘1’ adjacents, dans l’ordre, par 16, 8, 4 ,2 ou 1. Il faut toujours s’arranger à regrouper le maximum de ‘1’ pour diminuer la taille des termes.
- Lorsqu’il ne reste plus de ‘1’ isolé, les regroupements sont terminés.
- L’équation simplifiée est déduite de ces groupements
- Il et également possible et c’est parfois facile de regrouper les états 0 de la fonction F et de considérer que nous étudions F

<u>Exemples :</u>

C \ AB	00	01	11	10
0			1	
1	1	1	1	1

$$F(A,B,C) = C + AB$$

cde \ ab	00	01	11	10
000				1
001	1	1		1
011	1	1		
010	1	1		
110				
111				
101	1	1		
100	1	1		

$$F(a,b,c,d,e) = \overline{a}c\overline{d} + \overline{a}\,\overline{c}e + \overline{a}\,\overline{c}d + a\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{d}$$

d \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0

$$F(a,b,c,d) = \overline{b}\,\overline{d} + a\overline{d}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00				1
01	1	1	1	1
11				
10		1		

$$F(A,B,C,D) = \overline{C}.D + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.C.\overline{D}$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$$S_2 = \overline{d}$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

$$S_3 = \overline{b}.\overline{d}$$

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	1	1
11	0	0	1	1
10	0	1	1	1

$$S_4 = c + \overline{b}.d$$

1.3. Simplification par la méthode de Quine Mc Cluskey:

Plus lourde à appliquer que celle de Karnaugh, cette méthode n'est en générale employée que quand le nombre des variables est important(> 5). Elle présente l'intérêt d'être systématique et donc programmable.

Méthode:

La technique de Quine-McCluskey s'applique de la même manière aux expressions disjonctives qu'aux expressions conjonctives. Nous nous concentrerons dans ce qui suit sur le cas des expressions disjonctives.

L'algorithme s'exprime ainsi :

1. Exprimer la fonction sous forme canonique disjonctive ;
2. Exprimer les minterms sous forme binaire ;
3. Grouper les termes selon leur poids ;
4. Unir les termes deux à deux ;
5. Répéter l'étape (4) autant de fois que nécessaire ;
6. Identifier les impliquants premiers ;
7. Identifier les impliquants premiers essentiels ;
8. Si la fonction est entièrement exprimée par ses impliquants premiers essentiels, arrêter ;
9. Sinon, choisir, les impliquants premiers non essentiels permettant une couverture complète.

Exemple :Considérons la fonction suivante exprimée par sa table de vérité :

A	B	C	D		F
0	0	0	0		0
0	0	0	1		0
0	0	1	0		0
0	0	1	1		0
0	1	0	0		0
0	1	0	1		1
0	1	1	0		0
0	1	1	1		1
1	0	0	0		1
1	0	0	1		0
1	0	1	0		1
1	0	1	1		0
1	1	0	0		1
1	1	0	1		1
1	1	1	0		1
1	1	1	1		1

1. ***Exprimer la fonction sous forme canonique disjonctive***

$$F(A,B,C,D) = \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}\overline{D} + AB\overline{C}D + ABC\overline{D} + ABCD$$

2. ***Exprimer les minterms sous forme binaire***

$$F(A,B,C,D) = 0101 + 0111 + 1000 + 1010 + 1100 + 1101 + 1110 + 1111$$

Pour chaque minterm, on remplace les variables par leur équivalent binaire. Si la variable est inversée, on pose 0, si elle ne l'est pas, on pose 1. Par exemple :

1. $ABCD$ ⇨ 1111
2. $A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ ⇨ 1000
3. $AB\overline{C}D$ ⇨ 1101
4. $\overline{A}B\overline{C}D$ ⇨ 0101
5. $\overline{A}BCD$ ⇨ 0111

3. ***Grouper les termes selon leurs poids***

Le mot poids renvoie au nombre de 1 contenus dans la forme binaire des minterms.

1.	1000	Poids 1
2.	1010	
3.	0101	Poids 2
4.	1100	
5.	0111	
6.	1101	Poids 3
7.	1110	
8.	1111	Poids 4

4. *Unir les termes deux à deux*

Cette procédure est clé. Il s'agit de générer une nouvelle colonne de termes en réunissant deux à deux les termes de la colonne précédente.

1.	1000	✓	10x0	*Généré en combinant* 1. *et* 2.
2.	1010	✓	1x00	*Généré en combinant* 1. *et* 4.
3.	0101	✓	1x10	*Généré en combinant* 2. *et* 7.
4.	1100	✓	01x1	*Généré en combinant* 3. *et* 5.
5.	0111	✓	x101	*Généré en combinant* 3. *et* 6.
6.	1101	✓	110x	*Généré en combinant* 4. *et* 6.
7.	1110	✓	11x0	*Généré en combinant* 4. *et* 7.
8.	1111	✓	x111	*Généré en combinant* 5. *et* 8.
			11x1	*Généré en combinant* 6. *et* 8.
			111x	*Généré en combinant* 7. *et* 8.

5. *Répéter l'étape (4) autant de fois que nécessaire*

On réunit les termes de la nouvelle colonne comme nous l'avions fait à l'étape (4). Pour que deux termes soient unis, en plus des conditions précédentes, il faut que les x soient au même endroit.

1.	10x0	✓	1xx0	*Généré en combinant* 1. *et* 7.
2.	1x00	✓	1xx0	*Généré en combinant* 2. *et* 3.
3.	1x10	✓	x1x1	*Généré en combinant* 4. *et* 9.
4.	01x1	✓	x1x1	*Généré en combinant* 5. *et* 8.
5.	x101	✓	11xx	*Généré en combinant* 6. *et* 10.
6.	110x	✓	11xx	*Généré en combinant* 7. *et* 9.
7.	11x0	✓		
8.	x111	✓		
9.	11x1	✓		
10	111x	✓		

Si le même terme est généré plusieurs fois, on ne garde qu'une seule copie. On répète alors l'étape (4) :

1.	1xx0
2.	x1x1
3.	11xx

Impossible de combiner aucun des termes car il n'y a pas de termes possédant les x au même endroit

Ne pouvant plus réunir aucune paire de termes, l'étape (5) est terminée.

6. *Identifier les impliquants premiers*

On reprend ici l'ensemble des étapes effectuées :

1000 ✓	10x0 ✓	1xx0
1010 ✓	1x00 ✓	x1x1
0101 ✓	1x10 ✓	11xx
1100 ✓	01x1 ✓	
0111 ✓	x101 ✓	
1101 ✓	110x ✓	
1110 ✓	11x0 ✓	
1111 ✓	x111 ✓	
	11x1 ✓	
	111x ✓	

Tous les termes qui ne sont pas marqués (✓) sont des impliquants premiers : 1xx0, x1x1, 11xx. Cette écriture binaire se lit $A\overline{D}$, BD et AB respectivement.

7. Identifier les impliquants premiers essentiels

Pour identifier les impliquants premiers essentiels, on utilise un tableau tel que sur les lignes, on dispose tous les impliquants premiers identifiés et que sur les colonnes, on pose les minterms de la fonction. On procède alors par identification :

	1000	1010	0101	1100	0111	1101	1110	1111
1xx0	*	*		*			*	
x1x1			*		*	*		*
11xx				*		*	*	*

Un impliquant premier est essentiel s'il est le seul à être associé à au moins un minterm. Ainsi, un minterm appartient à un impliquant premier essentiel si sa colonne ne comporte qu'un seule astérisque(*).

	1000	1010	0101	1100	0111	1101	1110	1111
1xx0	(*)	(*)		*			*	
x1x1			(*)		(*)	*		*
11xx				*		*	*	*

Un impliquant premier est essentiel s'il comporte au moins une étoile entre parenthèses. Dans notre exemple, les impliquants premiers essentiels sont : 1xx0 et x1x1.

8. Vérifier si la fonction est entièrement exprimée par ses impliquants essentiels

Pour ce faire, il faut refaire le tableau (il est aussi possible d'effectuer cette étape sur le même tableau précédent) en ne gardant que les impliquants essentiels :

	1000	1010	0101	1100	0111	1101	1110	1111
1xx0	(*)	(*)		*			*	
x1x1			(*)		(*)	*		*

Pour que la fonction soit entièrement décrite par ses impliquant essentiels, il faut que chaque colonne comporte au moins une étoile. C'est le cas de notre exemple. La technique de Quine-McCluskey s'arrête à ce point :

$$F(A,B,C,D) = 1xx0 + x1x1 = A\overline{D} + BD$$

2-Fonctions incomplètement définies

Dans des cas pratiques, certains cmbinaisons de variables n'ont aucun sens physique et n'apparaissent jamais dans la réalité. Il est donc inutile de spécifier la valeur de la fonction pour de telles combinaisons.

Dans ce cas, le concepteur peut à sa convenance attribuer à ces cases la valeur 0 ou 1 de manière à obtenir le maximum de groupements.

•Pour les cas impossibles ou interdites il faut mettre un X dans la table de vérité.

•Les cas impossibles sont représentés aussi par des X dans la table de karnaugh

Il est possible d'utiliser les X dans des regroupements :

–Soit les prendre comme étant des 1

–Ou les prendre comme étant des 0

•Il ne faut pas former des regroupements qui contiennent uniquement des X

Table de vérité

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	X
1	0	1	0	1
1	0	1	1	X
1	1	0	0	1
1	1	0	1	X
1	1	1	0	1
1	1	1	1	X

Table de karnaugh

CD \ AB	00	01	11	10
00			1	
01		1	X	X
11	1	1	X	X
10		1	1	1

CD \ AB	00	01	11	10
00			1	
01		1	X	X
11	1	1	X	X
10		1	1	1

$$S = AB + CD + BD + AC + BC$$