Chapitre III : L'algèbre de Boole binaire

expression d'une fonction logique avec des circuits NANDs ou NOR exclusivement.
-schéma logique d'une fonction.

1. Définition et axiomes de l'algèbre de Boole.

En électronique numérique on manipule des variables logiques conventionnellement repérées par les valeurs 0 ou 1. Ces grandeurs obéissent à des règles d'algèbre particulières qu'il est indispensable de maîtriser avant d'entreprendre l'analyse ou la synthèse de circuits numériques. Dans ce chapitre nous énoncerons les principes et les règles de calcul de l'algèbre logique, appelé aussi algèbre de Boole, puis nous les appliquerons à l'écriture et à la manipulation des fonctions logiques.

1.1. Variables et fonctions logiques.

1.1.1. Variables logiques

On appelle variable logique une variable qui ne peut prendre que deux valeurs conventionnellement repérées par 0 et 1. On parle aussi de variable binaire. Chacune de ces deux valeurs est associée à une grandeur physique, par exemple la tension collecteur d'un transistor, ce qui permet de faire le lien entre une étude théorique utilisant l'algèbre de Boole et un circuit électronique. Deux cas de figure se présentent :

1.1.2. Fonctions logiques

Une fonction logique F des *n* variables logiques ($x1, x2…xn$) , notée par exemple $F = F(x1, x2…xn)$, associe une valeur 0 ou 1 aux différentes combinaisons possibles des *n* variables logiques ($x1, x2…xn$) . Chaque variable logique *xi* pouvant prendre la valeur 0 ou 1, il y a au total 2n combinaisons possibles des variables logiques ($x1, x2…xn$) et on définit complètement une fonction logique en donnant sa valeur pour chacune de ces combinaisons.
Les fonctions logiques peuvent être représentées sous forme de tables, appelées **tables de vérité**, donnant la valeur de la fonction pour chaque combinaison des variables logiques. Considérons par exemple une fonction F de deux variables *x* et *y*. Il y a donc 22 = 4 combinaisons possibles de ces deux variables. Une table de vérité donne la valeur de F pour chacune des 22 combinaisons possibles de ces 2 variables. On trouve généralement 2 types de représentations comme indiqué ci-dessous.

x y	**F**
0 0	0
1 0	1
1 1	0
0 1	1

x y	**0**	**1**
0	0	1
1	0	1

L'écriture de la table de vérité fait partie de l'analyse d'un système donné. A l'inverse une fois la table de vérité connue, il faut pouvoir déterminer le schéma électronique permettant de réaliser cette table : c'est la phase de synthèse

2. Les opérateurs de base :

Une algèbre logique se définit par l'existence de trois lois, ou fonctions logiques de base.

2.1. Fonction inversion NON (NOT).

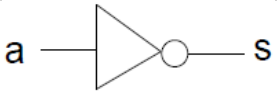
Cette fonction est également appelée complément

Notation : $S = x$

Table de vérité

x	$S = x$
0	1
1	0

$s = \bar{a}$



2.2. Fonction OU (OR).

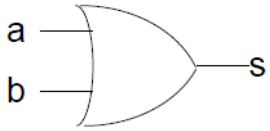
C'est une fonction de deux variables également appelée somme logique

Notation : $S = x + y$

Table de vérité

x	**y**	**S = x + y**
0	**0**	**0**
0	**1**	**1**
1	**0**	**1**
1	**1**	**1**

$s = a + b$



La fonction **OU** vaut 1 si au moins une des variables vaut 1.

2.3. Fonction ET (AND).

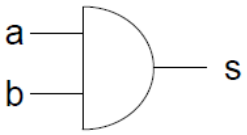
C'est une fonction de deux variables également appelée produit logique

Notation : $S = x \bullet y$

Table de vérité

a	***b***	***S = x•y***
0	**0**	**0**
0	**1**	**0**
1	**0**	**0**
1	**1**	**1**

$s = ab$



La fonction **ET** ne vaut 1 que si toutes les variables valent 1

2.4. Autres opérateurs logiques :

2.4.1. Circuits NAND et NOR

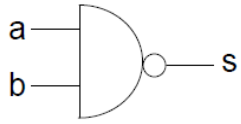
NOR : C'est une fonction de deux variables également appelée complément d'un produit logique

Notation : $s = \overline{a.b}$

Table de vérité

a	b	$s=\overline{a.b}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$s=\overline{a.b}$



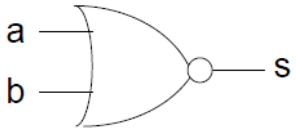
NOR : C'est une fonction de deux variables également appelée complément d'une somme logique

Notation : $s=\overline{a+b}$

Table de vérité

a	b	$s=\overline{a+b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$s=\overline{a+b}$

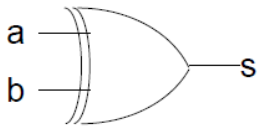


2.4.2. Ou exclusif

Table de vérité

a	b	$s=a\oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$s=a\oplus b=a\bar{b}+\bar{a}b$

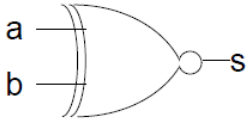


NONOU exclusif - XNOR

Table de vérité

a	b	$s=a\otimes b=\overline{a\oplus b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$s=a\otimes b=\overline{a\oplus b}=ab+\bar{a}\bar{b}$



2.4.3. Implication

3. théorèmes et propriétés de l'algèbre de Boole

Propriétés des opérateurs logiques

• **Associativité :** l'ordre des opérations n'est pas important s'ils ont la même priorité

$$(A+B)+C=A+(B+C) = A+B+C$$

$$(A.B).C=A.(B.C) = A.B.C$$

• **Commutativité :** l'ordre de la variable n'est pas important. Commencer la formule par A ou par B revient au même.

$$A+B=B+A$$

$$A.A=B.A$$

• **Distributivité :** Cette loi gère l'ouverture des parenthèses. Pour aller de la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication vers la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, il suffit de changer les « . » par les « + » et vise versa.

$$A(B+C) = AB+AC$$

$$\mathbf{A+(BC) = (A+B)(A+C)}$$

• **Idempotence :** La variable additionnée ou multipliée par elle garde toujours sa valeur.

$$\mathbf{A+A+A+A = A}$$

$$A.A.A.A = A$$

• **L'identité :** La variable additionnée par 0 ou multiplié par 1 reste inchangé, identique à elle-même

$$\mathbf{A+0 =A}$$

$$\mathbf{A.1=A}$$

• **Absorption :** A absorbe B et reste A

$$\mathbf{A+AB =A}$$

$$\mathbf{(A+A)(A+B)=A(A+B)=AA+AB=A(1+B)=A}$$

$$\mathbf{A.(A+B) =A}$$

$$\mathbf{AA+AB = A+AB = A(1+B)=A}$$

• **Éléments neutres:** Une variable multipliée par 0 donne 0 et additionnée par 1 donne 1

$$\mathbf{A.0 = 0}$$

$$\mathbf{A+1=1}$$

• **La double négation :** La négation de la négation donne la variable

$$\bar{\bar{A}}=A$$

• **Complémentarité:** La variable additionnée à son complément donne 1, multiplié à complément donne 0

$$A.\bar{A}=0$$

$$A+\bar{A}=1$$

Théorème de De Morgan

C'est une des propriétés les plus importantes des fonctions logiques. Elle repose sur la remarque suivante :

Les relations caractéristiques des lois **ET** et **OU** sont invariantes dans leur ensemble lors de la transformation + →•, • →+, $x \rightarrow x$, $x \rightarrow x$. Partons par exemple des relations constitutives de la loi **ET**

0 • x =0 , 1• x = x quelque soit x

Elles se transforment en 1+ x =1 , 0 + x = x quelque soit x

qui ne sont rien d'autre que les relations caractéristiques de la loi **OU**.

Le théorème de De Morgan est symbolisé par :

$x \bullet y = x + y$

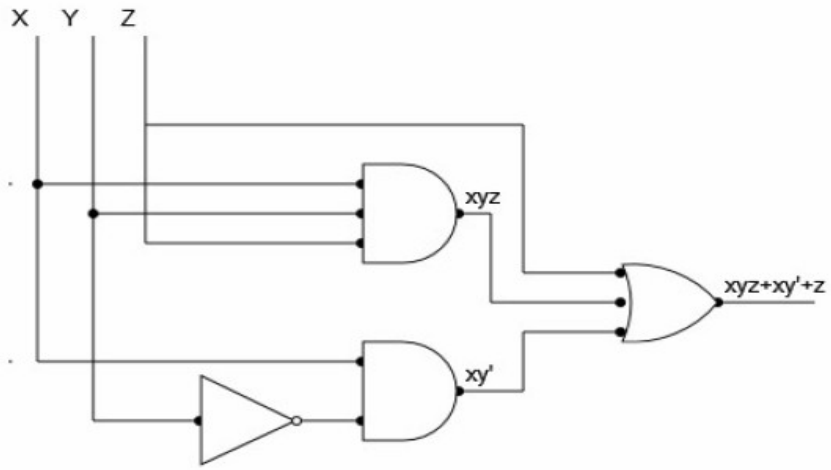
mais il est très général et porte sur toutes relations. Ainsi le complément d'une fonction logique sera obtenu en remplaçant les variables par leur complément, les signes + par des • et les signes • par des +. Ainsi

$F = f(\text{K } xi \text{ K}, +, \bullet)$ entraine $F = f(\text{K } xi \text{ K}, \bullet, +)$

3- représentation des fonctions logiques :

Les différentes fonctions booliennes sont décrites sous plusieurs formes :

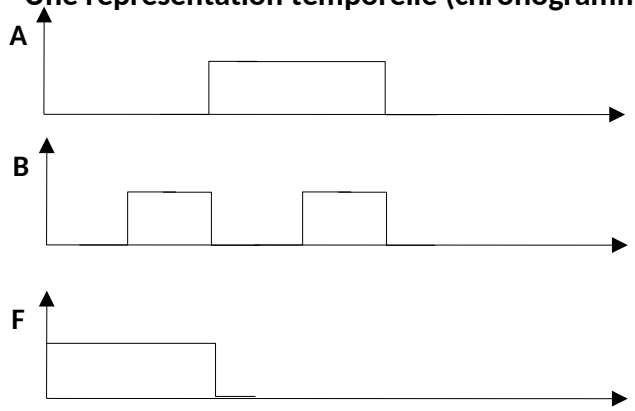
- **Une représentation logique (symbole logique= logigramme)**



- **Une représentation arithmétique (table de vérité)**

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- **Une représentation temporelle (chronogramme)**



- **Une représentation algébrique (équation algébrique)**

$$F(A,B,C) = AB\{\bar{C} + \bar{A}C + ABC¿$$

5- table de vérité d'une fonction logique

Une table de vérité définit les relations entrées/sorties en faisant la liste de toutes les possibilités, une ligne à la fois dans la table. $F(A,B,C) = AB\{\bar{C} + \bar{A}C + ABC¿$

1ère méthode :

1	2	3	1	2	3

A	B	C		$\bar{C}$	$AB\{\bar{C}¿$	$\bar{A}$	$\bar{A}C$	ABC		F
0	0	0		1	0	1	0	0		0
0	0	1		0	0	1	1	0		1
0	1	0		1	0	1	0	0		0
0	1	1		0	0	1	1	0		1
1	0	0		1	0	0	0	0		0
1	0	1		0	0	0	0	0		0
1	1	0		1	1	0	0	0		1
1	1	1		0	0	0	0	1		1

2ème méthode :

$$F(A,B,C)=AB\{\bar{C}+\bar{A}C+ABC¿$$

A	B	C		F
0	0	0		0
0	0	1		1
0	1	0		0
0	1	1		1
1	0	0		0
1	0	1		0
1	1	0		1
1	1	1		1

6- les formes canoniques d'une fonction logique

Il existe deux formes canoniques pour chaque fonction booléenne.

- La première forme canonique conjonctive :

  FNC : mintermes = somme des produits

- La deuxième forme canonique disjonctive :

  FND : maxtermes = produits des sommes

Exemple :

A	B	C		F
0	0	0		0
0	0	1		1
0	1	0		0
0	1	1		1
1	0	0		0
1	0	1		0
1	1	0		1
1	1	1		1

$$F(A,B,C)=AB\{\bar{C}+\bar{A}C+ABC¿$$

$$F_{FNC}(A,B,C)=\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}BC+AB\{\bar{C}+ABC¿$$

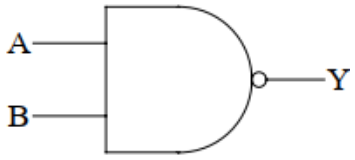
$$F_{FND}(A,B,C)=(A+B+C)(A+\bar{B}+C)(\bar{A}+B+C)(\bar{A}+B+\bar{C})$$

2ème méthode pour la forme FNC :

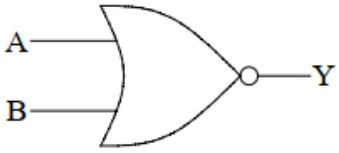
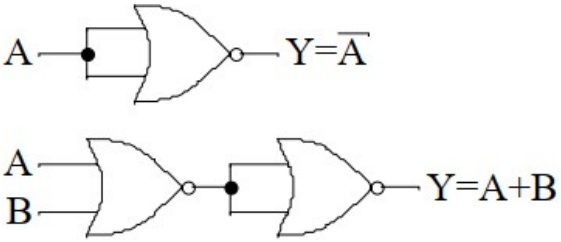
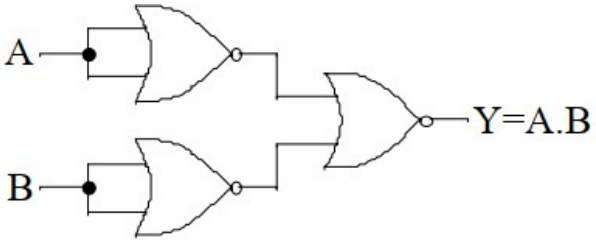
$$F(A,B,C)=AB\{C+AC+ABC¿ \quad =AB\{C+AC\}B+\bar{B}\}+ABC¿¿ \quad =AB\{C+ABC+ABC+ABC¿¿¿$$

7-expression d'une fonction logique avec des circuits NANDs ou NOR exclusivement.

NAND (NON ET)



NOR (NON OU)



Réalisation des fonctions NON, OU et ET en utilisant uniquement des portes NOR ou NAND