Chapitre I : les systèmes de numération

1. Définitions :

1. 1.Systèmes de numération

Pour qu'une information numérique soit traitée par un circuit, elle doit être mise sous forme adaptée à celui-ci. Pour cela Il faut choisir un système de numération de base B (B un nombre entier naturel ≥2) De nombreux systèmes de numération sont utilisés en technologie numérique. Les plus utilisés sont les systèmes : Décimal (base 10), Binaire (base 2), Tétral (base 4), Octal (base 8) et Hexadécimal (base 16).

Le tableau ci-dessous représente un récapitulatif sur ces systèmes

Décimal	Binaire	Tétral	Octal	Hexadécimal	Base 9	Base 11
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	10	2	2	2	2	2
3	11	3	3	3	3	3
4	100	10	4	4	4	4
5	101	11	5	5	5	5
6	110	12	6	6	6	6
7	111	13	7	7	7	7
8	1000	20	10	8	8	8
9	1001	21	11	9	10	9
10	1010	22	12	A	11	A
11	1011	23	13	B	12	10
12	1100	30	14	C	13	11
13	1101	31	15	D	14	12
14	1110	32	16	E	15	13
15	1111	33	17	F	16	14
16	10000	100	20	10	17	15
17	10001	101	21	11	18	16
18	10010	102	22	12	20	17
19	10011	103	23	13	21	18
20	10100	110	24	14	22	19
21	10101	111	25	15	23	1A
22	10110	112	26	16	24	20
23	10111	113	27	17	25	21
24	11000	120	30	18	26	22
25	11001	121	31	19	27	23
26	11010	122	32	1A	28	24
27	11011	123	33	1B	30	25
28	11100	130	34	1C	31	26
29	11101	131	35	1D	32	27
30	11110	132	36	1E	33	28

1.2. Base :

C'est le nombre de symboles distincts à partie desquels on peut réaliser n'importe quelle quantité, ces symboles sont représentés par des chiffres ou des lettres.

1.3. Nombre :

Représentation d'une information dans un système de numération par l'association de chiffres.

Exemple : 2004 : association de chiffres 2.0.4.

1.4. Digit :

Mot anglais désignant un chiffre ou une lettre quelconque soit la base.

1.5. Bit :

Mot anglais désignant un chiffre binaire : représente 1 ou 0 en numération binaire.

2. Présentation des systèmes décimal, binaire, octal et hexadécimal.

2. 1. Représentation polynomiale

Tout nombre **N** peut se décomposer en fonction des puissances entières de la base de son système de numération. Cette décomposition s'appelle la forme polynomiale du nombre **N** et qui est donnée par :

$$N=a_nB^n + a_{n-1}B^{n-1} + a_{n-2}B^{n-2} + \ldots + a_2B^2 + a_1B^1 + a_0B^0$$

- **B** : Base du système de numération, elle représente le nombre des différents chiffres qu'utilise ce système de numération.
- a_i : un chiffre (ou digit) parmi les chiffres de la base du système de numération.
- **i** : rang du chiffre a_i.

2.2. Système décimal (base 10) :

Le système décimal comprend 10 chiffres qui sont {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} qui sont dans ce cas des chiffres décimaux habituels. C'est un système qui s'est imposé tout naturellement à l'homme qui possède 10 doigts. Ecrivons quelques nombres décimaux sous la forme polynomiale :

Exemples :

$(5462)_{10} = 5*10^3 + 4*10^2 + 6*10^1 + 2*10^0$

$(239.537)_{10} = 2*10^2 + 3*10^1 + 9*10^0 + 5*10^{-1} + 3*10^{-2} + 7*10^{-3}$

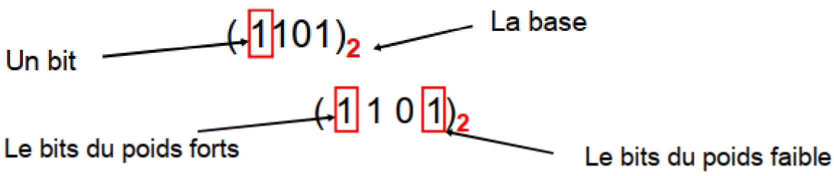
2.3. Système binaire (base 2)

Dans ce système de numération il n'y a que deux chiffres possibles {0, 1} qui sont souvent appelés bits « binary digit ». Ce système de numération est le plus utilisé dans les calculateurs numériques. Comme le montre les exemples suivants, un nombre binaire peut s'écrire sous la forme polynomiale.

Exemples :

$(111011)_2 = 1*2^5 + 1*2^4 + 1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0$

$(10011.1101)_2 = 1*2^4 + 0*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 + 1*2^{-1} + 1*2^{-2} + 0*2^{-3} + 1*2^{-4}$



2.4. Système tétral (base 4)

Ce système appelé aussi base 4 comprend quatre chiffres possibles {0, 1, 2, 3}. Un nombre tétral peut s'écrire sous la forme polynomiale comme le montre les exemples suivant :

Exemples :

$(2331)_4 = 2*4^3 + 3*4^2 + 3*4^1 + 1*4^0$

$(130.21)_4 = 1*4^2 + 3*4^1 + 1*4^0 + 2*4^{-1} + 1*4^{-2}$

2.5. Système Octal (base 8)

Le système octal ou base 8 comprend huit chiffres qui sont {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Les chiffres 8 et 9 n'existent pas dans cette base. Certains calculateurs utilisent ce système de numération, Ecrivons à titre d'exemple.

Exemples :

$(4527)_8 = 4*8^3 + 5*8^2 + 2*8^1 + 7*8^0$

$(1274.632)_8 = 1*8^3 + 2*8^2 + 7*8^1 + 4*8^0 + 6*8^{-1} + 3*8^{-2} + 2*8^{-3}$

2.6. Système Hexadécimal (base 16)

Le système Hexadécimal ou base 16 contient seize éléments qui sont {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}. Les chiffres A, B, C, D, E, et représentent respectivement 10, 11, 12, 13, 14 et 15.

Exemples :

$(3256)_{16} = 3*16^3 + 2*16^2 + 5*16^1 + 6*16^0$

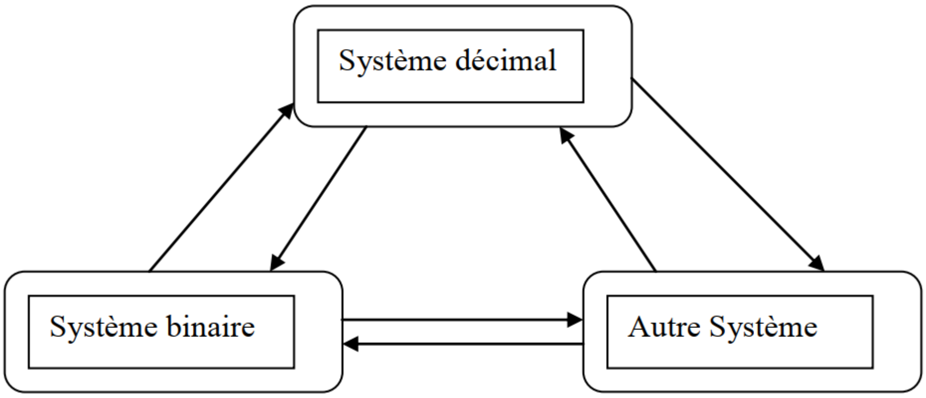
$(9C4F)_{16} = 9*16^3 + 12*16^2 + 4*16^1 + 15*16^0$

$(A2B.E1)_{16}= 10*16^2 + 2*16^1 + 11*16^0 +14*16^{-1}+ 1*16^{-2}$

3. Conversion entre ces différents systèmes.

Il s'agit de la conversion d'un nombre écrit dans une base B1 à son équivalent dans une autre base B2, Il y'a trois types de conversion :

- Conversion du système décimal en un autre système: cette opération s'appelle le **codage**.
- Conversion d'un système autre que le décimal en un système décimal: cette opération s'appelle le **décodage**.
- Conversion entre deux systèmes non décimaux: cette opération s'appelle le **transcodage**.



3.1 Conversion d'un nombre N de base B en un nombre décimal (décodage)

La valeur décimale d'un nombre **N**, écrit dans une base **B**, s'obtient par sa forme polynomiale décrite précédemment.

Pour les conversions Binaire – décimal / octal – décimal / hexadécimal – décimal, Il suffit de multiplier chaque bit ou chiffre ou digit par son poids correspondant puis de faire la somme des résultats obtenus.

Exemples:

$(1011)_2 = (?)_{10}$

$(1011)_2 = 1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 +1*2^0.$

$=8+2+1=11$

$= (11)_{10}.$

$(234)_8 = (?)_{10}.$

$(234)_8 = 2*8^2 +3*8^1 +4*8^0.$

$=128+24+4=156.$

= (156)10.

$(3C7)_{16} = (N)_{10}$

$(3C7)_{16} = 3* 16^2 + 12*16^1 + 7*16^0.$

$=769+192+7=967.$

$= (967)_{10}$.

$(1011101)_2= 1*2^6 + 0*2^5 + 1*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1+ 1*2^0=(93)_{10}$

$(231102)_4= 2*4^5 + 3*4^4 + 1*4^3 + 1*4^2 + 0*4^1+ 2*4^0=(2898)_{10}$

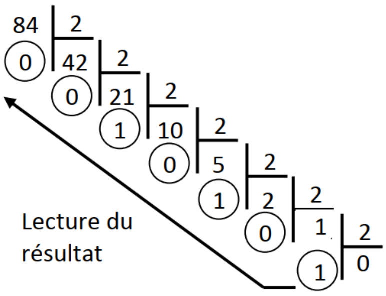
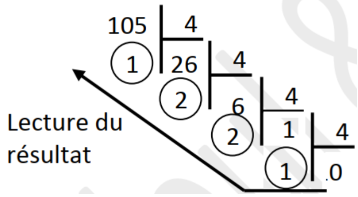
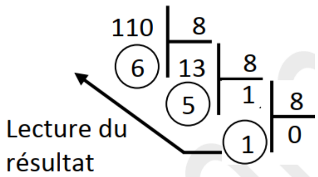
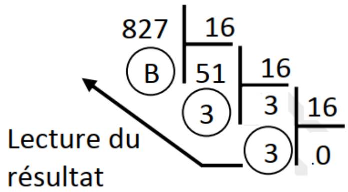
$(7452)_8= 7*8^3 + 4*8^2 + 5*8^1+ 2*8^0=(3882)_{10}$

$(D7A)_{16}= 13*16^2 + 7*16^1 + 10*16^0 =(3450)_{10}$

3.2. Conversion d'un nombre décimal vers une autre base B : (codage)

3.2.1. Conversion d'un nombre décimal entier :

Pour convertir un nombre décimal entier en un nombre de base **B** quelconque, il faut faire des divisions entières successives par la base **B** et conserver à chaque fois le reste de la division. On s'arrête jusqu'au moment où le quotient devient nul. Le nombre cherché sera obtenu en regroupant tous les restes successifs de droite à gauche.

Décimal – binaire	**Décimal – Tétral**
➲ $(84)_{10}=(\ ?\ )_2$  **$(84)_{10}=(1010100)_2$**	➲ $(105)_{10}=(\ ?\ )_4$  **$(105)_{10}=(1221)4$**
Décimal – octal	**Décimal – Hexadécimal**
➲ $(110)_{10}=(\ ?\ )_8$  **$(110)_{10}=(156)_8$**	➲ $(827)_{10}=(\ ?\ )_{16}$  **(827)10=(33B)8**

<u>3.2.2 Conversion d'un nombre décimal à virgule</u>

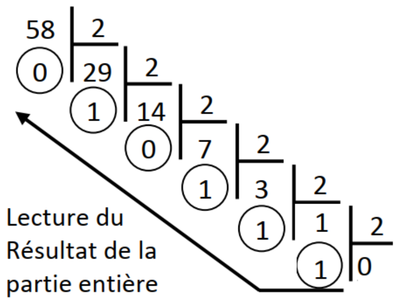
Pour convertir un nombre décimal à virgule dans une base **B** quelconque, il faut :

⦿Convertir la partie entière en effectuant des divisions successives par **B** (comme nous l'avons vu précédemment).

⦿Convertir la partie fractionnaire en effectuent des multiplications successives par **B** et en conservant à chaque fois le chiffre devenant entier.

Conversion du nombre (58,625) en base 2

➲Conversion de la partie entière



➲Conversion de la partie fractionnaire

$0.625 *2=\boxed{1}.25$

$0.\ 25 *2=\boxed{0}.5$

$0.\ 5 *2 = \boxed{1}.0$

Lecture du Résultat de la partie fractionnaire

$(58.625)_{10}=(111010.101)_2$

Parfois en multipliant la partie fractionnaire par la base **B** on n'arrive pas à convertir toute la partie fractionnaire. Ceci est dû essentiellement au fait que le nombre à convertir n'a pas un équivalent exacte dans la base **B** et sa partie fractionnaire est cyclique

Exemple : $(0.15)_{10}=(\ ?\ )_2$

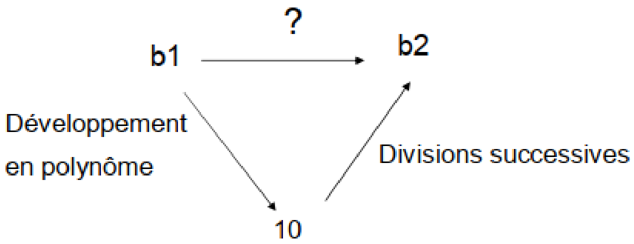
0.15 *2 = **0** .3
0.3 *2 = **0** .6
0.6 *2 = **1** .2
0.2 *2 = **0** .4
0.4*2 = **0** .8
0.8*2 = **1** .6
0.6 *2= **1** .2
0.2 *2 = **0** .4
0.4*2 = **0** .8

On dit que le nombre (0.15)10 est cyclique dans la base 2 de période **1001**

0.8*2= **1** .6 ➲ $(0.15)_{10}=(0.0010011\mathbf{1001})_2$

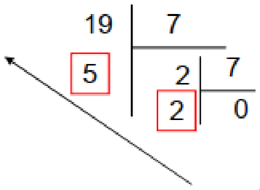
3.3. Conversion d'une base b1 à une base b2

•Il n'existe pas de méthode pour passer d'une base b1 à une autre base b2 directement.
• L'idée est de convertir le nombre de la base b1 à la base 10, en suit convertir le résultat de la base 10 à la base b2



Exemple : $(34)_5=(?)_7$

$(34)_5 = 3 * 5^1 + 4 * 5^0 = 15 + 4 = (19_{10}= (?)_7$



$(19)_{10}=(25)_7$

$(34)_5=(25)_7$

3.4. Conversion d'un nombre en base 2 à une base puissance de 2 (2, 4, 8, 16,….) :

Pour faire La conversion d'un nombre d'une base quelconque **B1** vers une autre base **B2** il faut passer par la base **10**. Mais si la base **B1** et **B2** s'écrivent respectivement sous la forme d'une puissance de 2 on peut passer par la base 2 (binaire) :

Base tétrale (base 4) : $4=2^2$ chaque chiffre tétral se convertit tout seul sur 2 bits.

Base 4	Base2
0	00
1	01
2	10
3	11

Base octale (base 8) : $8=2^3$ chaque chiffre octal se convertit tout seul sur 3 bits.

Base 8	Base 2
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Base hexadécimale (base 16) : $16=2^4$ chaque chiffre hexadécimal se convertit tout seul sur 4 bits.

Base 16	Base 2
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Exemples :

- $(1\ 0\ 2\ 2\ 3)_4 = (01\ 00\ 10\ 10\ 11)_2$
- $(6\ 5\ 3\ 0)_8 = (110\ 101\ 011\ 000)_2$
- $(9\ A\ 2\ C)_{16} = (1001\ 1010\ 0010\ 1100)_2$
- $(7\ E\ 9)_{16} = (13\ 32\ 21)_4$
- $(11\ 10\ 01\ 00\ 10)_2 = (3\ 2\ 1\ 0\ 2)_4$
- $(101\ 010\ 100\ 111\ 000)_2 = (5\ 2\ 4\ 7\ 0)_8$
- $(1101\ 1000\ 1011\ 0110)_2 = (D\ 8\ B\ 6)_8$

4. Opérations de base dans les différents systèmes

On procède de la même façon que celle utilisée dans la base décimale, Ainsi, il faut effectuer l'opération dans la base 10, ensuite convertir le résultat par colonne la base **B**.

4.1. Addition

base Binaire	base Tétrale
$(11001001 + 110101 = 11111110)_2$; $(1101110 + 100010 = 10010000)_2$	$(20031 + 1302 = 21333)_4$; $(32210 + 1330 = 100200)_4$
base Octale	**base hexadécimale**
$(63375 + 7465 = 73062)_8$; $(5304 + 6647 = 14153)_8$	$(5\ 3\ 0\ 4 + CC3B = 11F3F)_{16}$; $(89A27 + EE54 = 9887B)_{16}$

4.2. Soustraction

Base Binaire	Base Tétrale
$(1110110 - 110101 = 1000001)_2$; $(1000001001 - 11110011 = 100010110)_2$	$(13021 - 2103 = 10312)_4$; $(2210 - 1332 = 21333)_4$
Base Octale	**Base Hexadécimal**
	$(725B2 - FF29 = 62689)_{16}$; $(45DD3 - 9BF6 = 3C1DD)_{16}$

$\left(\begin{array}{lr} & 52130 \\ - & 6643 \\ \hline = & 43265 \end{array}\right)_8$	$\left(\begin{array}{lr} & 145126 \\ - & 75543 \\ \hline = & 47363 \end{array}\right)_8$	

4.3. Multiplication

Base Binaire	Base Binaire	Base Tétrale	Base Tétrale	Base Hexadécimal
$\begin{array}{lr} & 1110110 \\ * & 11011 \\ \hline & 1110110 \\ & 1110110 \\ & 1110110 \\ & 1110110 \\ \hline = & 110001110010 \end{array}$	$\begin{array}{lr} & 1010111 \\ * & 10011 \\ \hline & 1010111 \\ & 1010111 \\ & 1010111 \\ \hline = & 11001110101 \end{array}$	$\begin{array}{lr} & 13320 \\ * & 210 \\ \hline & 13320 \\ & 33300 \\ \hline = & 10123200 \end{array}$	$\begin{array}{lr} & 3021 \\ * & 113 \\ \hline & 21123 \\ & 3021 \\ & 3021 \\ \hline = & 1020033 \end{array}$	$\begin{array}{lr} & 6340 \\ * & B51 \\ \hline & 6340 \\ & 1F040 \\ & 443C0 \\ \hline = & 4632740 \end{array}$

4.4. Division

Base Binaire	Base Tétrale
$\begin{array}{r\|l} 110000000110 & 1110010 \\ \cline{2-2} -\ 1110010 & 11011 \\ \cline{1-1} 10011100 & \\ -\ 1110010 & \\ \cline{1-1} 10101011 & \\ -\ 1110010 & \\ \cline{1-1} 1110010 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 300012 & 1302 \\ \cline{2-2} -\ 1302 & 123 \\ \cline{1-1} 10321 & \\ -\ 3210 & \\ \cline{1-1} 11112 & \end{array}$

4.5. Autres exemples :

$(1111.11)_2+(101.1101)_2+(110.101)_2+(1000.11)_2=(100100.1111)_2$	$(101)_2+(11.10)_2+(0.111)_2=(1001.011)_2$
$\left(\begin{array}{lr} & {\scriptstyle 10\ 10\ 10\ 10\ 1} \\ & 1111.1100 \\ + & 0101.1101 \\ + & 0110.1010 \\ + & 1000.1100 \\ \hline = & 100100.1111 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{lr} & {\scriptstyle 1\ 1\ 1} \\ & 101.000 \\ + & 011.100 \\ + & 000.111 \\ \hline = & 100100.1111 \end{array}\right)$