محاضرات

الاحصاء - 3 .

مقدمة

هذا المقياس هو عبارة عن استكمال للقاعدة التي اكتسبها الطلبة خلال دراستهم لمقياسين أساسيين هما: الاحصاء (1) و الاحصاء (2) وهو أيضا تمهيد للاحصاء التطبيقي .

والهدف من هذا المقياس هو تقديم الأسس الرياضية للاحصاء التطبيقي .

وبما أننا نسمع دائما عن نتائج احصائية حول مواضيع اقتصادية، سياسية واجتماعية متعددة منها: الانتخابات، توجهات المستهلكين ... الخ

إذن ماهي الأسس النظرية الرياضية التي تستند عليها هذه الدراسات؟

الاجابة على هذا السؤال يتطلب فهم العلاقات الرياضية بين المتغيرات المختلفة مثل المتوسط، التباين وغيرها والخصائص المناظرة لها. وهو ما سنتناوله في هذا المقياس عن طريق دراسة مختلف التطبيقات عن هذه العلاقات .

(1)

محاضرات
الاحصاء -3-

الفصل I : نظرية توزيع المعاينة

تنتشر عمليات الاستقصاء في مجتمعنا حيث لا يمر يوم دون أن نسمع أو نطلع على مجموعة من الاستقصاءات التي تفسر لنا مثلا عدد المشتركين في شبكة الانترنت، عدد مستعملي الهواتف النقالة و مختلف التطبيقات، عدد الساعات التي يقضيها نسبيا الاشخاص على مواقع التواصل الاجتماعي (Facebook ...الخ).

مما يجعلنا نتساءل حول كيفية تحديد كل هذه المعلومات؟ أو بطريقة أخرى كيف يمكن الاستدلال من خلال بيانات العينة على خصائص المجتمع الذي أخذت منه؟

و بالتالي يجب أن نفهم جيدا خصائص هذه البيانات قبل التطرق الى توزيعات المعاينة لا بد من تعريف بعض المفاهيم الأساسية.

مفاهيم أساسية:

المجتمع والعينة: (population et Echantillon)

نوضحه عن طريق مجموعة من الأمثلة:

- وزن الطلبة (نأخذ 100 طالب من مجموع الطلبة)
العينة. المجتمع

- نوع الهاتف الاكثر انتشارا للطلبة (نأخذ فوج (30) من مجموع 10 أفواج)

- نفس الشيء الذي كنا نقوم به في حالة صندوق به 10 كريات منها: 3 حمراء - 4 صفراء 3 خضراء.

- يرغب مزارع بتقدير الوزن النسبي للبطاطا في حقله، يأخذ ... حبة بطاطا يزن كل واحدة كل قدر من مجموع البطاطا.

لذا نعبر عن الوزن النسبي بالمتغيرة العشوائية X والتي لها متوسط حسابي $\bar{X}$ (التوقع الرياضي) وتباين σ^2 وغيرهما من معالم المجتمع.

~~يمكننا تعريف~~ ونقصد بالمجتمع القياسات أو القيم وليس الأفراد أو الأشياء التي تم قياسها وقد يكون محدود أو غير محدود. أما العينة فتكون ~~عبارة عن~~ محدودة ونرمز لها بالرمز n والمجتمع بـ N.

وكل قيمة نحصل عليها في العينة هي "تحقق" "realisation"

العينة ~~التقليدية~~ العشوائية والعينة ~~غير التقليدية~~: ~~Echantillon exhaustif et non exhaustif~~

Echantillon aleatoire

عند قيامنا بالمعاينة نبحث عادة عن عينة ممثلة للمجتمع الحقيقي وتعكس خصائصه (عينة "احتمالية"). وهي إحدى الطرق لتكوين العينة حيث يكون احتمال ظهور كل عنصر معلوم وتسمى أيضا العينة العشوائية البسيطة حيث احتمالات ظهور كل عنصر تكون متساوية.

مثلا: أريد ~~~~ حساب متوسط العمر ~~~~ للطلبة، أقوم بطريقة القرعة أي كتابة أسماء الطلبة في قصاصات ومن ثم اختيار عينة من 10 طلبة.

العينة النفادية والعينة غير النفادية: Exhaustif / non

عندما نقوم بسحب عنصر بالإرجاع نسمي ذلك معاينة غير نفادية لأنها لا تؤدي إلى نفاد المجتمع (ممكن ظهور نفس العنصر عدة مرات)

والمعاينة بدون إرجاع تعرف بالنفادية

②

معالم المجتمع : (Les Paramètres d'une population)

نقصد بها مجموعة من الخصائص مثل، المتوسط الحسابي μ، المتباين σ^2، التوزيع الاحتمالي ... الخ.

احصائية المعاينة (Statistique de l'échantillonnage)

لتقدير معالم المجتمع (المتوسط μ، التباين σ^2 ... الخ) ننطلق من بيانات العينة، حيث نحتاج الى حساب معالم مثل متوسط m العينة، تباين العينة ... الخ. ونسمي كل قيمة تحسب انطلاقا من بيانات العينة (من أجل تقدير قيمة معالم المجتمع) باحصائية المعاينة. ونعبر رياضيا عنها بكل دالة في المتغيرات العشوائية التي تمثل القيم المحصل عليها في العينة.

توزيع المعاينة للمتوسطات :

توزيع المعاينة للمتوسطات :

مثال : ليكن المجتمع : 1، 3، 5، 6 و 8. ما هي القيمة المتوقعة للمتوسط عينة مسحوبة بالارجاع ومكونة من مفردتين وبدون ارجاع

في حالة السحب بالارجاع : نحتاج الى تحديد جميع الحالات الممكنة للمتوسط m_i حسب كل عينة والتي عددها $5^2 = 25$.

المتوسطات الممكنة للعينة عن التفادية

4,5	3,5	3	2	1
5,5	4,5	4	3	2
6,5	5,5	5	4	3
7	6	5,5	4,5	3,5
8	7	6,5	5,5	4,5

العينات الممكنة

8	6	5	3	1
(8،1)	(6،1)	(5،1)	(3،1)	(1،1)
(8،3)	(6،3)	(5،3)	(3،3)	(1،3)
(8،5)	(6،5)	(5،5)	(3،5)	(1،5)
(8،6)	(6،6)	(5،6)	(3،6)	(1،6)
(8،8)	(6،8)	(5،8)	(3،8)	(1،8)

القيمة المتوقعة لـ m_i هي متوسطها الحسابي $\boxed{E(m) = \sum m_i(p_i) = 4,6}$

$$m = \left(\sum m_i/25\right) = \frac{1+2+3+3,5+\dots+6,5+7+8}{25} = 4,6.$$

حساب متوسط المجتمع: $\mu = (1+3+5+6+8)/5$

$\mu = 4,6.$

نلاحظ أن التوقع الرياضي لـ m يساوي متوسط المجتمع μ.

التوزيع الاحتمالي لـ m

m_i	1	2	3	3,5	4	4,5	5,5	6,5	7	8
P_i	1/25	2/25	3/25	2/25	2/25	5/25	4/25	3/25	2/25	1/25

حالة السحب بدون ارجاع: العينات الممكنة عددها: $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!}$

$= 10$

العينات الممكنة

8	6	5	3	1
(8,1)	(6,1)	(5,1)	(3,1)	–
(8,3)	(6,3)	(5,3)	–	–
(8,5)	(6,5)	–	–	–
(8,6)	–	–	–	–
–	–	–	–	–

المتوسطات الممكنة للعينة
توزيع المعاينة للمتوسطات
(معاينة نظرية)

4,5	3,5	3	2	–
5,5	4,5	4	–	–
6,5	5,5	–	–	–
7	–	–	–	–
–	–	–	–	–

القيمة المتوقعة لـ $\hat{m}_i$ هي متوسط قيمها:

$$E(m) = \left(\sum m_i/10\right) = \frac{(2+3+3,5+4,5+\dots+7)}{10} = 4,6$$

متوسط المجتمع $\mu = 4,6$

التوزيع الاحتمالي

m_i	2	3	3,5	4	4,5	5,5	6,5	7
P_i	1/10	1/10	1/10	1/10	2/10	2/10	1/10	1/10

③

نلاحظ مرة أخرى أن القيمة المتوقعة تساوي متوسط المجتمع.

نظرية 1:

اذا كانت X متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما و m متغيرة عشوائية تمثل متوسط عينة مسحوبة من ذلك المجتمع، فان القيمة المتوقعة لمتوسط العينة $E(m)$ تكتب كما يلي:

$$E(m) = \mu_m = \mu$$

البرهان:

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n} \Sigma X_i\right) = \frac{1}{n} \sum E(X_i) = \frac{1}{n} \sum \mu = \frac{1}{n} \cdot n\mu$$

$$= \mu$$

ب) تباين توزيع المعاينة للمتوسطات:

- حالة المعاينة بالارجاع:

مثال: من المثال السابق أحسب تباين المجتمع، أحسب تباين (و الانحراف المعياري) لتوزيع المعاينة للمتوسطات σ_m^2 علما أن العينة مسحوبة بالارجاع (غير نفادية).

قارن بين تباين المجتمع و تباين متوسطات العينات الممكنة.

الحل:

m_i

1	2	3	3,5	4,5
2	3	4	4,5	5,5
3	4	5	5,5	6,5
3,5	4,5	5,5	6	7
4,5	5,5	6,5	7	8

تباين المجتمع:

$$\sigma^2 = \Sigma(x_i - \mu)^2 / 5$$

$$= \frac{(1-4,6)^2 + (3-4,6)^2 + (6-4,6)^2 + (5-4,6)^2 + (8-4,6)^2}{5}$$

$$\cancel{\sigma^2 = 5{,}84} \qquad \sigma^2 = \frac{29{,}2}{5} = 5{,}84 \Rightarrow \boxed{\sigma^2 = 5{,}84}$$

تباين توزيع المعاينة للمتوسطات:

$$\sigma_m^2 = \frac{\sum (m_i - m)^2}{25} = \frac{\left[(1-4{,}6)^2 + (2-4{,}6)^2 + (3-4{,}6)^2 + \dots + (6{,}5-4{,}6)^2 + (7-4{,}6)^2 + (8-4{,}6)^2\right]}{25}$$

$$= \frac{73}{25} \Rightarrow \boxed{\sigma_m^2 = 2{,}92}$$

نلاحظ أن

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$2{,}92 = \frac{5{,}84}{2}$$

نظرية 2:

اذا كانت X متغيرة عشوائية تمثل مجتمع ما و m_i متغيرة عشوائية تمثل متوسط عينة مسحوبة من نفس المجتمع بالارجاع، فإن تباين m_i (تباين توزيع المعاينة للمتوسطات) يكتب كما يلي:

$$\boxed{\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n}}$$

حيث n حجم العينة

البرهان

$$\boxed{\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = \sum (x_i - \mu)^2 / n}$$

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n} \sum x_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum V(x_i) = \frac{1}{n^2} \sum \sigma^2$$

$$= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

- حالة المعاينة بدون ارجاع :

مثال: من المثال السابق أحسب تباين المتوسطات الممكنة للعينة σ_m^2 في حالة المعاينة بدون ارجاع، قارن بين تباين المجتمع وتباين المتوسطات الممكنة للعينة ؟

الحل :

m_i

4,5	3,5	3	2	-
5,5	4,5	4	-	-
6,5	5,5	-	-	-
7	-	-	-	-

حساب تباين المجتمع :

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i-\mu)^2}{5} = 5,84.$$

$$\boxed{\sigma^2 = 5,84}$$

تباين المتوسطات الممكنة العينة :

$$\sigma_m^2 = \frac{\sum (m_i - m)^2}{10} = \frac{\left[(2-4,6)^2 + (3-4,6)^2 + \cdots + (6,5-4,6)^2 + (7-4,6)^2 \right]}{10}$$

$$= \frac{21,9}{10} \Rightarrow \boxed{\sigma_m^2 = 2,19}$$

نستنتج أن :

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{5-2}{5-1}\right) = \frac{5,84}{2}\left(\frac{3}{4}\right) = 2,19.$$

نظرية 3 :

اذا كان X م.ع تمثل مجتمع ما حجمه N و m_i متغيرة عشوائية تمثل متوسط عينة حجمها n مسحوبة من نفس المجتمع بدون ارجاع فان تباين m_i (تباين توزيع المعاينة للمتوسطات) يكتب كما يلي

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

وتسمى $\frac{N-n}{N-1}$ معامل الارجاع

حيث يمكن اهمال معامل الارجاع اذا كانت العينة صغيرة جداً
بالمقارنة مع حجم المجتمع (لانه يقترب من 1).
وتكون قيمة معامل الارجاع اقل من 1 كلما كان $n > 1$، لذا
يعني أن خطأ المعاينة في حالة المعاينة بدون ارجاع اقل
منه في حالة المعاينة بالارجاع، مما يعني أن المعاينة بدون
ارجاع تعطي تقدير اكثر دقة لمعلمة المجتمع μ

د) طبيعة توزيع m

من المهم ~~جدا~~ دراسة طبيعة توزيع المعاينة للمتوسطات
وذلك من خلال النظريات التالية:

نظرية 4:
اذا كان المجتمع موزع طبيعيا بمتوسط μ وتباين σ^2 فان متوسط
العينه المسحوبة منه يتبع أيضا التوزيع الطبيعي بمتوسط
μ وتباين σ^2/n ونكتب
$m \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

نظرية 5: (نظرية النهاية المركزية)
اذا كان المجتمع الذي تسحب منه العينة ذو متوسط μ وتباين
σ^2 لكن ليس بالضرورة طبيعيا فان المتغيرة المعيارية
لـ m أي
$Z = \frac{m-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ تؤول الى التوزيع الطبيعي
المعياري عندما يكون n كبيراً ($n > 30$) ونكتب
$Z \sim N(0, 1)$

(5)

في حالة المجتمع محدود والعينة نفادية نستبدل $\sigma/\sqrt{n}$ ب $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

هذه النظرية محققة في الحالتين (إرجاع ودون إرجاع) مهما كان حجم العينة

عمليا يستخدم الاحصائيين هذه الصيغة المعدلة بمعامل الإرجاع للانحراف المعياري عندما $n/N \geq 0,05$

تسمى النسبة n/N معدل الاستقصاء ونرمز له ~~~~ بالرمز f

مثال: مجتمع حجمه $N=1000$ بمتوسط $\mu = 25$ و $\sigma = 14$

(بعد استخراج كل العينات الممكنة)

- أحسب المتوسط والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للمتوسطات في حالة: حجم العينة $n=40$ و $n = 68$

الحل: المتوسط: $E(m) = \mu = 25$

الحالة (1) $n = 40$

$$n/N = \frac{40}{1000} = 0,04 < 0,05$$

$$\sigma_m = \sigma/\sqrt{n} = \frac{14}{\sqrt{40}} = \frac{14}{6,324} = 2,245$$

$$\boxed{\sigma_m = 2,245}$$

الحالة (2) $n = 68$

$$n/N = \frac{68}{1000} = 0,068 > 0,05$$

$$\Rightarrow \sigma_m = \frac{14}{\sqrt{68}}\sqrt{\frac{1000-68}{1000-1}} = \frac{14}{8,246}\sqrt{\frac{932}{999}}$$

$$\sigma_m = 1,69\sqrt{0,932} \Rightarrow \boxed{\sigma_m = 1,63}$$

مثال: بالاعتماد على معطيات المثال السابق، وفي حالة $n=40$

احسب احتمال ان يكون m محصور بين 22 و 28.

نفس السؤال بالنسبة ل $n = 68$.

الحل: $\underline{n = 40}$

$$Z_1 = \frac{m_1 - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{22 - 25}{14/\sqrt{40}} = \frac{-3}{2{,}2075} = -1{,}35$$

$$\boxed{Z_2 = \frac{m_2 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{28 - 25}{14/\sqrt{40}} = \frac{+3}{2{,}2075} = 1{,}35}$$

$$P(22 \leq m < 28) = P(Z_1 < Z < Z_2)$$

$$= P(-1{,}35 < Z < 1{,}35) = P(1{,}35) - P(-1{,}35)$$

$$= P(1{,}35) - (1 - P(1{,}35))$$

$$\boxed{P(1{,}35) - \underset{\substack{\parallel \\ (1 - P(1{,}35))}}{P(-1{,}35)}}$$

من جدول التوزيع الطبيعي القيمة Z المقابلة ل $1{,}35$

تساوي $0{,}9115$ $\cancel{0{,}91149}$

$$= 0{,}91159 - 0{,}0\,8851 = 0{,}82298$$

$\underline{n = 68}$

$$Z_1 = \frac{m_1 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{22-25}{14/\sqrt{68}}\left(\frac{1000-68}{1000-1}\right)$$

$$= \frac{-3}{1{,}697}\left(\frac{932}{999}\right) = 1{,}767\,(0{,}933)$$

6

$Z_1 = -1,64$

$$Z_2 = \frac{m_2 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{28-25}{14/\sqrt{68}} \left(\frac{100-68}{100-1}\right)$$

$Z_2 = +1,64$

$P(Z_1 < Z < Z_2)$

$$P(-1,64 < Z < 1,64) = P(1,64) - P(-1,64)$$

$$(1 - P(1,64))$$

$= 0,9495 - 0,0505$

$= 0,899$

3) توزيع المعاينة للنسبة:

تتطلب دراسة توزيع المعاينة للنسبة توضيح الآلية التي يتكون فيها التوزيع من حيث المتوسط التشتت وشكل التوزيع.

- ونقصد بالنسبة في المجتمع بالكسر $P = \frac{Na}{N}$ حيث N حجم المجتمع و Na عدد المفردات التي تتحقق فيها خاصية ما.

- ونقصد بالنسبة في العينة الكسر $P' = \frac{na}{n}$، حيث n حجم العينة و na عدد مفردات العينة التي تحقق نفس الصفة.

ندرس خصائص الاحصائية P' وتوزيعها الاحتمالي لأنها احصائية تستخدم لتقدير النسبة في المجتمع P.

مثال: مجتمع حجمه $N=5$ مكون من العناصر التالية: 1، 0، 0، 1، 0

(1: العنصر له صفة و 0: ليس له صفة). نسحب عنصرين عشوائيا بدون الارجاع. احسب p' نسبة العينات التي تتحقق فيها الصفة المطلوبة P.

الحل:

متوسط المجتمع: $\mu = \frac{2}{5} = 0,4$

تباين المجتمع: $\mu = \frac{\Sigma(x_i - \mu)^2}{5}$

$$\cancel{= \frac{(1-0,4)^2 + (1-0,4)^2}{5} = \frac{(0,6)^2 + (0,6)^2}{5}}$$

$$= \frac{(1-0,4)^2 + (1-0,4)^2 + (0-0,4)^2 + (0-0,4)^2 + (0-0,4)^2}{5}$$

$$\boxed{\sigma^2 = 2,4} \qquad \boxed{\mu = 0,4}$$

نسبة المجتمع: $P = \frac{N_a}{N} = \frac{2}{5} = 0,4$.

العينات الممكنة

	0	1	0	0	1
1	0،1	1،1	0،1	0،1	1،1
0	0،0	1،0	0،0	0،0	1،0
0	0،0	1،0	0،0	0،0	1،0
1	0،1	1،1	0،1	0،1	1،1
0	0،0	1،0	0،0	0،0	1،0

0	1	0	0	1	
0،1 0,5	1،1 1	0،1 0,5	0،1 0,5	–	1
0،0 0	1،0 0,5	0،0 0	–	–	0
0،0 0	1،0 0,5	–	–	–	0
0،1 0,5	–	–	–	–	1
–	–	–	–	–	0

عدد الحالات الممكنة بدون الارجاع (العينات) هي: ~~25~~

10

ومنه: $p' = \frac{n_a}{n} = \frac{1}{10} = 0,1$

- التوقع الرياضي والتباين للاحصائية p'

نظرية:

لتكن X م.ع تمثل المجتمع ما غير محدود وموزع طبيعيا حيث p نسبة المفردات في المجتمع ذات صفة معينة.
ولتكن p' م.ع تمثل نسبة المفردات ذات الصفة المذكورة في العينة المسحوبة من نفس المجتمع فإن:

$$E(p') = \mu_{p'} = p$$

$$\sigma^2_{p'} = \frac{pq}{n}$$

حيث $q = 1 - p$

~~كما أن $n \geq 30 : p' \sim N(p, \sigma_{p'})$~~

وفي حالة المجتمع محدود (عينة نفادية) نضرب في معامل الارجاع عند حساب الانحراف المعياري.

مثال: من خلال المثال السابق احسب $E(p')$ و $\sigma^2_{p'}$ في حالة الارجاع وبدون ارجاع.

الحالة (1): حالة الارجاع

0	1	0	0	1	
0,1	1,1	0,1	0,1	1,1	1
0,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0
0,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0
0,1	1,1	0,1	0,1	1,1	1
0,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0

المتوسط

0,5	1	0,5	0,5	1
0	0,5	0	0	0,5
0	0,5	0	0	0,5
0,5	1	0,5	0,5	1
0	0,5	0	0	0,5

$(p' - E(p'))^2 \cdot f$	$p' \cdot f$	التكرار f	قيم المتغير p'
$1{,}44 = (0-0{,}4)^2 \cdot 9$	0	9	0
$0{,}12 = (0{,}5-0{,}4)^2 \cdot 12$	6	12	0,5
$1{,}44 = (1-0{,}4)^2 \cdot 4$	4	4	1
3	10	25	المجموع

التوقع الرياضي لـ p' : ~~للعينة~~

$$E(p') = \frac{10}{25} = \frac{\sum p' \cdot f}{f} = 0{,}4.$$

نسبة المجتمع : $p = \frac{2}{5} = 0{,}4$

ومنه $E(p') = p$.

تباين p' :

$$V^2(p') = \frac{\sum (p' - E(p'))^2 \cdot f}{\sum f} = \frac{3}{25} = 0{,}12 .$$

~~تباين المجتمع هو:~~ $\cancel{\sigma^2 = 2{,}4.}$

$$\frac{p \cdot q}{n} = \frac{0{,}4\,(0{,}6)}{25} = 0{,}12$$

ومنه :

$$\boxed{V^2(p') = \frac{p \cdot q}{n}}$$

حالة (2) بدون ارجاع :

$(p' - E(p'))^2 \cdot f$	$p' \cdot f$	f	p'
$0{,}48 = (0-0{,}4)^2 \cdot 3$	0	3	0
$0{,}06 = (0{,}5-0{,}4)^2 \cdot 6$	3	6	0,5
$0{,}36 = (1-0{,}4)^2 \cdot 1$	1	1	1
0,9	4	10	3

(8)

$$E(p') = \frac{\sum p' \cdot f}{n} = \frac{4}{10} = 0,4 .$$

$$\sigma^2(p') = \frac{\sum (p' - E(p'))^2 \cdot f}{n} = \frac{0,9}{10} = 0,09 .$$

نلاحظ أن في حالة معاينة نفادية فإن

$$E(p') = p = 0,4 .$$

$$\sigma^2(p') = \frac{p(1-p)}{n} \frac{N-n}{N-1} = \frac{0,4(0,6)}{2}\left(\frac{5-2}{5-1}\right)$$

$$\sigma^2(p') = 0,12 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = 0,09 .$$

توزيع المعاينة لـ p' :

نظرية :

اذا كانت X م ع تمثل مجتمع ما حيث p نسبة المفردات ذات صفة معينة و p' متغيرة ع تمثل نسبة المفردات ذات نفس الصفة في عينة عشوائية مسحوبة من ذات المجتمع فإن :

عندما $n > 30$ $\quad p' \sim N(p, \sigma_{p'})$

توزيع المعاينة للفروق والمجاميع

1) المتوسط والتباين :

ليكن لدينا مجتمعين نسحب من كل مجتمع عينة عشوائية، نحسب في كل عينة مسحوبة من المجتمع الأول الاحصائية $\hat{\theta}_1$ وبالنسبة للمجتمع الثاني الاحصائية $\hat{\theta}_2$.

٢)- بالنسبة للفرق ~~الفرق~~:

$$\mu_{\cancel{v}_1-\cancel{v}_2} = \mu_{\cancel{v}_1} - \mu_{\cancel{v}_2}$$

$$\sigma^2_{\cancel{v}_1-\cancel{v}_2} = \sigma^2_{\cancel{v}_1} + \sigma^2_{\cancel{v}_2}$$

ملاحظة:

اذا كانت الاحصائية هي المتوسط: $\mu_{m_1-m_2} = \mu_{m_1} - \mu_{m_2} = \mu_1 - \mu_2$

$$\sigma^2_{m_1-m_2} = \sigma^2_{m_1} + \sigma^2_{m_2} = \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}$$

اذا كانت الاحصائية هي النسبة فان:

$$\sigma^2_{p_1-p_2} = \sigma^2_{p_1} + \sigma^2_{p_2} = \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}$$

$$\mu_{p_1-p_2} = \mu_{p_1} - \mu_{p_2} = p_1 - p_2 .$$

ب)- بالنسبة للمجموع فان:

$$\mu_{v_1+v_2} = \mu_{v_1} + \mu_{v_2}$$

$$\sigma^2_{v_1+v_2} = \sigma^2_{v_1} + \sigma^2_{v_2} .$$

مثال: ليكن المجتمع U_1 : $3 ، 5 ، 7$ والمجتمع U_2 : $2 ، 5$.

تحقق أن: $\mu_{u_1-u_2} = \mu_{u_1} - \mu_{u_2}$ ؛ $\sigma^2_{u_1-u_2} = \sigma^2_{u_1} + \sigma^2_{u_2}$

- متوسط المجتمع الأول:

$$\mu_{u_1} = (3+5+7)/3 = 5$$

- متوسط المجتمع الثاني:

$$\mu_{u_2} = (2+5)/2 = 3,5$$

$U_1 - U_2$	U_1: 3	5	7
U_2: 2	1	3	5
5	-2	0	2

خصائص دليل التوقع :

$$E(c) = c$$

$$E(c x_i) = c\,E(x_i)$$

$$E(c + x_i) = c + E(x_i)$$

$$E(x_i + y_i) = E(x_i) + E(y_i)$$

$$E(a x_i + b y_i) = a\,E(x_i) + b\,E(y_i)$$

$$E(x_i y_i) = E(x_i) \cdot E(y_i)$$

$$\cancel{E(x_i / y_i) =}$$

خواص دليل التباين :

$$V(c) = 0$$

$$V(c x_i) = c^2\,V(x_i)$$

$$V(c + x_i) = V(x_i)$$

خطأ المعاينة

σ σ

σ

σ

(9) $\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2 = \sum (x-\mu)^2/n$.

$\mu_{u_1-u_2} = (1+3+5-2+0+2)/6 = 9/6 = 1,5$.

$\mu_{u_1} - \mu_{u_2} = 5 - 3,5 = 1,5$.

$\sigma^2_{u_1} = E(X^2) - E(X)^2 = (3^2+5^2+7^2)/3 - (5)^2$

$= \frac{8}{3} = \cancel{19,33}\ 2,66$.

$\sigma^2_{u_2} = E(X^2) - E(X)^2 = (2^2+5^2)/2 - (3,5)^2$

$\cancel{16,75} = \frac{4,5}{2} = 2,25$

$\cancel{\sigma^2_{u_1-u_2} = \frac{\left[(1-1,5)^2+(3-1,5)^2+(5-1,5)^2+(-2-1,5)^2+(0-1,5)^2+(2-1,5)^2\right]}{6}}$

$\cancel{= \frac{17,5}{6} = 2,91}$

$$\sigma^2_{u_1-u_2} = \frac{\left[(1)^2+(3)^2+(5)^2+(-2)^2+(0)^2+(2)^2\right]}{6} - (1,5)^2$$

$= 4,91$.

$\sigma^2_{u_1} + \sigma^2_{u_2} = 2,66 + 2,25 = 4,91$

نظرية :

في حالة n_1 و $n_2 \geq 30$ يقترب توزيع المتغيرة المعيارية للفرق بين متوسطين من التوزيع الطبيعي المعياري

$\mu_{m_1-m_2} \sim N(0,1)$

توزيع المعاينة للتباين ولنسبة تبايني عينتين:

- توزيع المعاينة للتباين:

أ) حالة المعاينة بالارجاع:

نظرية:

اذا كانت X م ع تمثل مجتمع ما و S^2 ~~عينة~~ متغيرة ع تمثل تباين عينة مسحوبة بالارجاع ~~من~~ حجمها n فإن:

$$E(S^2) = \mu_{S^2} = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

ملاحظة: من النظرية السابقة (نجد أن) فإن

$$E\left(S^2 \frac{n}{n-1}\right) = \sigma^2$$

ونقول عن $S^2 \frac{n}{n-1}$ أنه مقدر غير منحاز لـ σ^2 ونرمز له بالرمز $\hat{S}^2$ حيث

$$\hat{S}^2 = \frac{S^2 . n}{n-1}.$$

ب) حالة المعاينة بدون ارجاع:

نظرية:

اذا كانت X م ع تمثل مجتمع ما و S^2 متغيرة ع تمثل تباين عينة نظامية مسحوبة من ذات المجتمع فإن القيمة المتوقعة لتباين العينة تكتب:

$$E(S^2) = \mu_{S^2} = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)$$

لما يكون N عدد كبير فإن

$$1 \sim \frac{N}{N-1}$$

مثال: من المثال الأول أحسب القيمة المتوقعة لتباين العينة المسحوبة بالارجاع وبدون ارجاع من خلال تباينات العينات الممكنة.
قارن بين تباين المجتمع والقيمة المتوقعة

تذكير بالمثال:

العينات الممكنة

	1	3	5	6	8
1	1،1	3،1	5،1	6،1	8،1
3	1،3	3،3	5،3	6،3	8،3
5	1،5	3،5	5،5	6،5	8،5
6	1،6	3،6	5،6	6،6	8،6
8	1،8	3،8	5،8	6،8	8،8

المتوسطات الممكنة

	1	3	5	6	8
1	1	2	3	3,5	4,5
3	2	3	4	4,5	5,5
5	3	4	5	5,5	6,5
6	3,5	4,5	5,5	6	7
8	4,5	5,5	6,5	7	8

الحل: حالة (1) بالارجاع

التباينات الممكنة

	1	3	5	6	8
1	0	1	4	6,25	12,3
3	1	0	1	2,25	6,25
5	4	1	0	0,25	2,25
6	6,25	2,25	0,25	0	1
8	12,3	6,25	2,25	1	0

$$= E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{\boxed{(1^2+1^2)}}{2} - (1)^2 = \frac{2}{2} - 1 = 0$$

$$= \frac{(1)^2+(3)^2}{2} - (2)^2 = \frac{10}{2} - 4 = 5-4 = 1$$

$$\vdots$$

$$= \frac{(8)^2+(8)^2}{2} - (8)^2 = 64 - 64 = 0$$

تباين المجتمع:

$$\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\sigma^2 = \left((1)^2+(3)^2+(5)^2+(6)^2+(8)^2\right)/5 - (4,6)^2 = 5,84 \quad \boxed{\sigma^2 = 5,84}$$

القيمة المتوقعة لتباين العينة المسحوبة

$$E(S^2) = \sum S_i^2 / 25 = (0+1+\dots+1+0)/25 = 73/25 = 2,92$$

$$\boxed{E(S^2) = 2,92}$$

$$E(S^2) = \sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right) = 5,84\left(\frac{2-1}{2}\right) = 5,84/2 = 2,92$$

حالة (2) بدون ارجاع

التوفيقات الممكنة

	8	6	5	3	1	
	8,1	6,1	5,1	3,1	-	1
	8,3	6,3	5,3	-	-	3
	8,5	6,5	-	-	-	5
	8,6	-	-	-	-	6
	-	-	-	-	-	8

المتوسطات الممكنة

4,5	3,5	3	2	-
5,5	4,5	4	-	-
6,5	5,5	-	-	-
7	-	-	-	-
-	-	-	-	-

التباينات الممكنة

12,3	6,25	~~2,25~~ 4	1	-
6,25	2,25	~~2,25~~ 1	-	-
2,25	0,25	-	-	-
1	-	-	-	-
-	-	-	-	-

$$\frac{(1)^2+(3)^2}{2}-(2)^2=5-4=1$$

$$\frac{(1)^2+(5)^2}{2}-(3)^2=4.$$

تباين المجتمع :

$$\sigma^2=5,84.$$

القيم المتوقعة للتباينات :

$$E(s^2)=\frac{\sum s_i^2}{10}=\frac{36,5}{10}=3,65.$$

$$E(s^2)=\sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)=5,84\left(\frac{2-1}{2}\right)\left(\frac{5}{4}\right)=3,65$$