Ensemble négligeable et mesure complétes

Définition 1.4.4 *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $N \subset X$. L'ensemble N est dit négligeable dans $(X, \mathcal{M}, \mu)$ s'il existe $E \in \mathcal{M}$ tel que $N \subset E$ et $\mu(E) = 0$.*

Remarque 1.4.5 *Si $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties négligeables dans $(X, \mathcal{M}, \mu)$ alors $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est négligeable. En effet, pour tout $n \geq 1$ il existe $E_n \in \mathcal{M}$ tel que $A_n \subset E_n$ et $\mu(E_n) = 0$.*

Or

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \quad et \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0.$$

Donc $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ est négligeable.

Définition 1.4.6 *Un espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est dit complet si toute partie négligeable est mesurable (et donc de mesure nulle). Dans ce cas on dit que la mesure μ est compléte.*

1.5 Mesure de Lebesgue

Théorème 1.5.1 *[13]*

Il existe une unique mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, notée λ, telle que

$$\lambda(]a, b[) = b - a$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

On l'appelle la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Remarques 1.5.2 *1) Il est clair que la mesure λ est σ-finie puisque*

$$\lambda([-n, n]) = 2n < +\infty \quad et \quad \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [-n, n]$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lambda(\{x\}) = 0$ et par conséquent

$$\lambda(]a, b[) = \lambda(]a, b]) = \lambda([a, b[) = \lambda([a, b]) = b - a.$$

En effet, $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty}]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$, donc par la continuité décroissante

$$\lambda(\{x\}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \lambda(]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$$

On en déduit immédiatement que

Proposition 1.5.3 *Tout ensemble dénombrable D de $\mathbb{R}$ possède une mesure de Lebesgue nulle, $\lambda(D) = 0$.*

Démonstration. Puisque $D = \bigcup_{n=1, x_n \in \mathbb{R}}^{+\infty} \{x_n\}$, nous avons

$$\lambda(D) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(\{x_n\}) = 0$$

ce qui implique que $\lambda(D) = 0$. ∎

La mesure de Lebesgue possède des propriétés importantes.

Proposition 1.5.4 *[4]La mesure de Lebesgue λ est invariante par translation et invariante par symétrie. C'est-à-dire pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a*

$$\lambda(\alpha + A) = \lambda(A) \quad et \quad \lambda(-A) = \lambda(A)$$

pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, où $\alpha + A = \{a + \alpha, \ a \in A\}$ et $-A = \{-a, \ a \in A\}$.

Théorème 1. *Il existe une unique mesure λ_d sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ telle que quelque soit l'hyperpavé $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ de $\mathbb{R}^d$, on ait :*

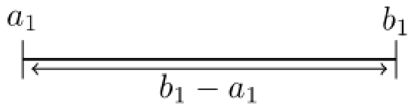
$$\lambda_d([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]) = (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_d - a_d).$$

On appellera cette mesure la **mesure de Lebesgue** *sur $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Admis. □

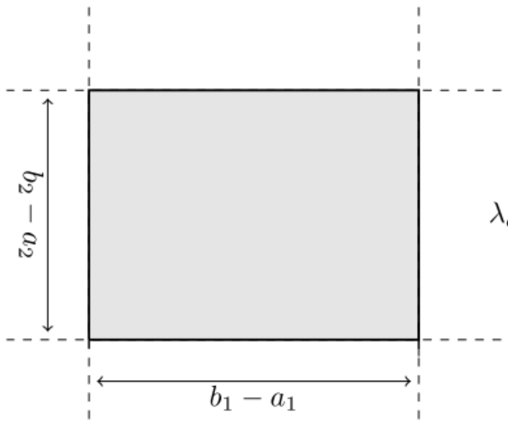
Exemple 1.5.1 *Les exemples suivants illustrent les valeurs de λ_d pour $d = 1, 2, 3$.*

Segment S dans $\mathbb{R}$:



$\lambda_d(S) = b_1 - a_1$:

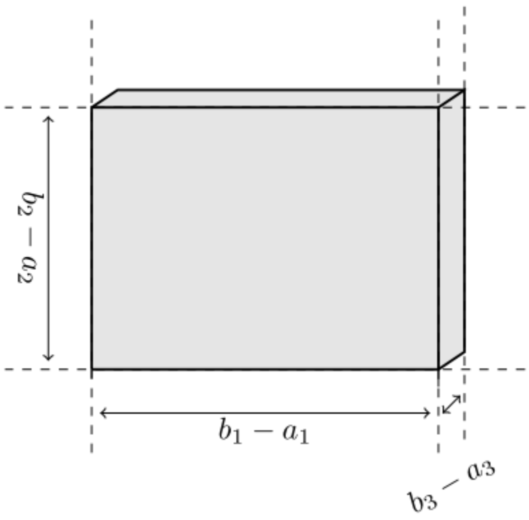
Rectangle R dans $\mathbb{R}^2$:



$\lambda_d(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$:

Pavé P dans $\mathbb{R}^3$:

$\lambda_d(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$:



Dans ce théorème, il y a deux choses que l'on admet pour l'instant.

1. La mesure de Lebesgue λ_d est unique.

2. La mesure de Lebesgue λ_d existe. Il est à noter que la démonstration du théorème ci-dessus est difficile (et particulièrement l'existence). C'est pour cette raison que l'on met de côté sa démonstration pour l'instant.