REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التّعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département : Mathématiques et Informatique
NIVEAUX : 3 aime ANNEE INFORMATIQUE (SI)

جامعة خميس مليانة
كليّة العلوم والتكنولوجيا
قسم : الرياضيات والإعلام الآلي
المستوى الثالثة اعلام الي نظم معلوماتية

BOUKEDROUN MOHAMMED
ENSEIGNANT CHERCHEUR A L'UNIVERSITE DE KHEMIS-MILIANA
m.boukedroun@unv-dbkm.com
TEL :

POLYCOPIE DE COURS DE LA MATIERE

Recherche Opérationnelle et programmation linéaire

Présentation du cours :

Cette polycopie est adressée aux étudiants de troisième année Informatique option système d'information.
Ce cours présente une introduction générale sur la Recherche Opérationnelle et exactement la programmation linéaire (PL) qui sert à résoudre des problèmes de gestion et d'aide à la décision. Les problèmes de programmation linéaires sont généralement liés à des problèmes d'allocation de ressources limitées de la meilleure façon possible afin de maximiser ou minimiser un coût. Ce cours permet de familiariser les étudiants aux différents problèmes de programmation linéaire et de leur présenter quelques méthodes de résolution de ces problèmes.

Plan du cours :

- **Chapitre 0** : Généralité sur la recherche opérationnelle et la Programmation Linéaire
  - ✓ Section 1 : Rappel sur des notions d'algèbre linéaire (équations et inéquations,…)
  - ✓ Section 2 : Recherche opérationnelle et programmation linéaire
- **Chapitre I** : Modélisation des problèmes sous forme d'un programme Linéaire
  - ✓ Section 1 : Choix et Hypothèses sur les variables de décision, contraintes, fonction d'Objectif
  - ✓ Section 2 : Formulation générale
- **Chapitre II** : Résolution Graphique d'un programme linéaire
  - ✓ Section 1 : Représentation de la région réalisable

Références:

- Précis de recherche opérationnelle de Robert Faure, Bernard Lemaire et Christophe Picouleau (2009).
- Programmation linéaire et applications : Eléments de cours et exercices corrigés, de Khaled Mellouli, Abdelkader El Kamel et Pierre Borne (2004).
- Recherche opérationnelle, tome 3 : Programmation linéaire et extensions - Problèmes classiques de Roseaux (2003).

Chapitre 0

Rappels d'algèbre linéaire

Les matrices

Définition 1

On appelle matrice $A \in R^{m\times n}$ de type (m×n) tout tableau à m lignes et n colonnes ayant comme éléments des nombres réels. Un vecteur de R^m est vu comme une matrice de type m × 1. Pourquoi des matrices ? Elles permettent de représenter utilement des systèmes d'équations linéaires.

$$(P):\begin{cases}3x_1 + x_2 - x_3 = 1\\ 2x_1 + x_3 = 5\end{cases}$$

Peut se représenter par

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}$$

Pour désigner les éléments d'une matrice, on utilise des listes d'indices. On note

$$A^j = (A_l^j)_{l\in L\ Lignes}^{j\in J\ Colonnes}$$

On désigne la j–ème colonne de A par

$$A^j = \begin{pmatrix}A_1^j\\ .\\ .\\ .\\ A_m^j\end{pmatrix}$$

On désigne sa ℓ–ième ligne par

$$A_l = \begin{pmatrix}A_l^1 & . & . & . & A_l^n\end{pmatrix}$$

Cette notation permet de désigner facilement des sous–matrices de A. Sur l'exemple,

$$A_{(1,3)}^{(1,3)} = \begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Désigne la matrice obtenue en supprimant la deuxième colonne de A. On note ${}^tA$ la transposée de A. Les indices de lignes (resp. de colonnes) de A correspondent aux indices de colonnes (resp. de lignes) de ${}^tA$. Sur l'exemple

$$t_A = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Définition 2

Un ensemble de colonnes $\{A^1, \ldots, A^r\}$ d'une matrice A est dit linéairement indépendant si

$$\lambda_1 A^1 + \ldots + \lambda_r A^r = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$$

Définition 3

On appelle base d'une matrice A un ensemble linéairement indépendant maximal de colonnes de A (par extension, on appelle base la liste des indices de ces colonnes).

Proposition 1

Toutes les bases d'une matrice A ont même nombre d'éléments.

Définition 4

Ce nombre est appelé le rang de A.

Les matrices les plus simples

Un nombre est une matrice (1, 1). La matrice $V = (x_1, x_2, x_3)$ a 1 ligne et 3 colonnes est appelée vecteur ligne. La matrice

$$W = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

à 3 lignes et 1 colonne est appelée vecteur colonne. Dans l'espace a 3 dimensions <3, un point peut être représenté par ses 3 coordonnées (x_1, x_2, x_3) et V, ou W, peut ainsi designer un point de <3.

Opérations entre matrices

Soient $A \in R^{mxn}, B \in R^{pxq}, \lambda \in R$. Les opérations élémentaires sont les suivantes.

1. La multiplication par un scalaire

$$C = \lambda A = \left(\lambda A_l^j\right)$$

2. La somme de A et de B ne peut se faire que si m = p et n = q

$$C = A + B = \left(A_l^j + B_l^j\right)$$

3. 3. Le produit de A et de B ne peut se faire que si n = p. En supposant :

$$A = A_L^J, B = B_J^K$$

$$C = AB = \left(\sum_{j \in J} A_l^j B_j^k\right)_{l \in L}^{j \in J}$$

4. Le produit est associatif mais pas commutatif.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Donc } A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices carrées

Définition

Une matrice est dite carrée si son nombre de lignes est égal à son nombre de colonnes. Ce nombre est appelé ordre de la matrice. Les éléments de la forme a_{ii} constituent la diagonale de A, appelée parfois diagonale principale pour la distinguer de la seconde diagonale.

Exemple: une matrice carrée est dite magique si la somme des éléments de chacune de ses lignes est égale à la somme des éléments de chacune de ses colonnes. Soit la matrice magique :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrices carrées particulières

Matrice diagonale : tous les éléments sont nuls sauf ceux de la diagonale, ∀ i ∀ j, i déférente de j ⇒ aij = 0.

Matrice scalaire : c'est une matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux a un même nombre a.

Matrice unité : c'est une matrice scalaire avec a=1. On la note I ou In, si l'on veut préciser son ordre.

Matrice symétrique : c'est une matrice A telle que ∀ i ∀ j, aij = aji.

Remarque : A symétrique ⇔A' = A.

Matrice antisymétriques : c'est une matrice A telle que ∀ i ∀ j aij = −aji.

Remarque 1 : la diagonale d'une matrice antisymétriques est nulle car ∀ i aii = −aii = 0.

Remarque 2 : A antisymétriques ⇔A' = −A.

Matrices particulières

1. La matrice 0 (élément neutre pour l'addition).
2. La matrice unité de taille m. On la note Um. C'est une matrice carrée de type m × m avec des 1 sur la diagonale principale et des 0 partout ailleurs.

Définition 5

Une matrice carrée A de type m×m est dite inversible s'il existe une matrice, notée A-1

$$AA^{-1}=U_m$$

Proposition 2

L'inverse d'une matrice inversible A de type m × m est un inverse aussi bien à gauche qu'à droite : $AA^{-1}=A^{-1}A=U_m$

Note :

il est évident que si A a un inverse à gauche B et un inverse à droite C alors B = C puisque C = (BA)C , B = B(AC) et B(AC) = (BA)C . La proposition est plus compliquée à démontrer.

Trace d'une matrice

Définition : La trace d'une matrice carrée A, notée tr(A) est la somme de ses éléments diagonaux $tr(A) = \sum_i a_{ii}$

Matrices définies par blocs

Une notation souvent utilisée consiste à écrire une matrice A (n, p) comme une juxtaposition de sous-matrices ou blocs. On dit alors que A est partitionnée.
Il faut bien entendu que les dimensions des blocs soient compatibles. Exemple: A, matrice à n lignes et p colonnes peut s'écrire

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Ou A11 et A12 ont k lignes, A21 et A22 n-k lignes, A11 et A21 l colonnes, A12 et A22 p-l colonnes.

Transposition

On vérifie facilement que la transposée de A, partitionnée comme ci-dessus, vaut

$$A = \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{pmatrix}$$

Somme et produit de matrices partitionnées : Soient

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

Si les blocs Aij et Bij ont même dimension, la somme A + B s'écrit de façon évidente

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{pmatrix}$$

Le produit de deux matrices partitionnées est effectué selon la règle énoncée en 4, en traitant chaque bloc comme un élément. Il faut que les dimensions coïncident, c'est-`a-dire que les colonnes de la première matrice et les lignes de la seconde soient partitionnées de la même manière.

Le pivot de Gauss

Écriture matricielle d'un système linéaire

On s'intéresse au problème suivant : étant donné un système linéaire, décrire l'ensemble de ses solutions. Voici un exemple de système linéaire :

$$(P) : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Résoudre le système revient à résoudre le système A x = b où la matrice $A \in R^{mxn}$, des coefficients du système et le vecteur $b \in R^m$, des membres gauches des équations sont donnés et où x = t(x1 . . . xn) désigne le vecteur des inconnues.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Trois cas peuvent se produire : le système n'a aucune solution, le système a exactement une solution, le système a une infinité de solutions. La résolution peut se mener automatiquement par l'algorithme du « pivot de Gauss » ou sa variante, le « pivot de Gauss–Jordan ».

Le pivot de Gauss

Définition 6

Deux systèmes qui ont même ensemble de solutions sont dits équivalents. On transforme un système en un système équivalent, plus simple, sur lequel on lit toutes les informations désirées. Les opérations suivantes ne changent pas les solutions d'un système (parce qu'elles sont réversibles). Il faut les faire à la fois sur les membres gauche et droit des équations.

1. Multiplier une ligne par un scalaire non nul.
2. Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne.
3. Échanger deux lignes.

Le « pivot de Gauss » applique les opérations précédentes sur le système dans le but d'obtenir un système équivalent où chaque équation (on les lit du bas vers le haut) introduit au moins une nouvelle inconnue. Reprenons l'exemple qui précède. Après pivot de Gauss :

$$(P): \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ - x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

L'équation du bas introduit x3 et x4. L'équation du milieu introduit x2. L'équation du haut introduit x1. Plutôt que de manipuler le système d'équations, on manipule la matrice (A, b) formée de la matrice A des coefficients du système, bordée par le vecteur des seconds membres.

$$(A,b) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice (A′, b′) obtenue après pivot de Gauss :

$$(A^{'},b^{'}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Le fait que chaque équation introduit au moins une inconnue se traduit par le fait que la diagonale principale est formée d'éléments non nuls (ce sont les « pivots ») et que les éléments sous les pivots sont nuls. Remarque : on pourrait très bien avoir une diagonale avec des « décrochements ».

La variante de Gauss–Jordan est un pivot de Gauss « poussé au maximum » où on impose que les pivots soient égaux à 1 et que tous les éléments d'une colonne contenant un pivot (sauf le pivot bien sûr) soient nuls. Voici le système et la matrice (A′′, b′′) obtenus après pivot de Gauss–Jordan :

$$(P):\begin{cases} x_1 + \frac{15}{12}x_4 = \frac{5}{2} \\ x_2 + 5x_4 = 1 \\ x_3 - 3x_4 = -1 \end{cases} \qquad (A'', b'') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{15}{12} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

On peut maintenant décrire l'ensemble des solutions du système en servant de x4 comme paramètre.

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \frac{15}{12}x_4 \\ 1 - 5x_4 \\ -1 + 3x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}, x_4 \in R \right\}$$

Algorithme

On procède colonne par colonne. On commence à la colonne 1. On cherche un élément non nul (un pivot). On choisit A11 = 2. On ajoute un multiple de la première ligne à chacune des lignes qui suivent de façon à faire apparaître des zéros sous le pivot. On obtient

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

On passe à la colonne 2. On cherche un élément non nul sur cette colonne qui ne soit pas sur la même ligne que le pivot précédent (on veut en fait que sur la ligne du nouveau pivot il y ait un zéro au niveau de la première colonne). On choisit le 1 sur la deuxième ligne. On ajoute un multiple de la deuxième ligne à la troisième de façon à faire apparaître des zéros sous le pivot.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

C'est fini pour le pivot de Gauss. Pour obtenir un système sous forme de Gauss–Jordan, on peut continuer comme suit. On ajoute un multiple de la troisième ligne aux deux qui précèdent pour faire apparaître des zéros sur la troisième colonne

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

On ajoute un multiple de la deuxième ligne à la première pour faire apparaître un zéro sur la deuxième colonne

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

On multiplie enfin chaque ligne par un scalaire approprié pour que les pivots vaillent 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{15}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans le cas général, il peut arriver qu'on ne puisse pas trouver de pivot sur la colonne considérée. Dans ce cas, on passe à la colonne suivante. Le résultat du pivot de Gauss n'est pas unique. À chaque étape, le choix du pivot influe sur les calculs et leur résultat. Il y a pourtant des propriétés du système qui ne dépendent pas du choix du pivot.

Propriétés des systèmes linéaires

Soit (A, b) un système et (A′, b′) un système équivalent sous forme de Gauss ou de Gauss–Jordan. Le système est sans solutions si et seulement s'il y a un pivot dans la colonne b′. Le système a une unique solution si et seulement si toutes les colonnes sauf b′ contiennent un pivot. Le système a une infinité de solutions si et seulement si b′ et au moins une colonne de A′ ne contiennent pas de pivot. C'est le cas de l'exemple qui précède (colonne x4). Dans ce cas, on peut décrire l'ensemble des solutions du système en se servant des inconnues correspondant aux colonnes sans pivots comme paramètres.

Proposition 3

L'algorithme du pivot de Gauss ne change ni les bases ni le rang d'une matrice.

Corollaire :

On peut lire le rang et une base d'une matrice A sur la matrice A′ obtenue après pivot de Gauss : le rang est égal au nombre de pivots ; l'ensemble des indices des colonnes contenant un pivot forme une base. Sur l'exemple, on a trouvé une base I = (1, 2, 3). Le rang du système est donc 3.

Proposition 4

Le rang d'une matrice de type m × n est inférieur ou égal à la min (m, n).