Chapitre 3 :

Résolution d'un programme linéaire avec la méthode de simplexe (Maximisation)

Introduction

Le chapitre précèdent présente des méthodes de résolution des problèmes d'optimisation linéaire telle que la méthode géométrique (graphique) et celle énumérative mais le problème qui se pose si lorsque on a plus de deux variables de décision on ne peut pas utilise ces derniers méthodes Une procédure algébrique pour résoudre les programmes linéaires avec plus que deux variables fera l'objet de ce chapitre. C'est la méthode de simplexe.

La méthodologie proposée pour cette technique consiste à visiter tous les états possibles dans un système en partant d'un sommet vers un sommet adjacent de manière à réviser et améliorer la fonction objective. Pour ce faire, nous procédons à l'exploration des différentes étapes selon l'ordre de priorité donné ci-dessous :

Étape 1 : On démarre l'application de l'approche (méthode du simplexe) par la transformation des contraintes d'inégalité en contraintes d'égalité en ajoutant les variables d'écart.

Étape 2 : Dans un second temps nous sélectionnons les variables originales comme variables hors-base et les variables d'écarts comme variable basique. puis nous effectuerons une permutation entre une variable hors-base de notre choix qui sera remplacée par une variable de base (entrante). Le choix de la variable entrante repose sur la variable dont le coefficient est le plus élevé dans la fonction objective.

Étape 3 : La variable sortante est la première à s'annuler. On répète le processus jusqu'à ce que tous les coefficients de fonction objective soient négatifs ou nuls. Dans ce cas, on arrête et la solution optimale est trouvée.

Techniques de résolution.

Pour déterminer le programme initial, on pose habituellement à zéro les variables principales du modèle. Pour l'entreprise de production, ceci correspond à ne fabriquer aucun produit : $X_j=0$.
Dans l'application de la méthode algébrique, le système d'équations correspondant aux contraintes se présente toujours de la façon suivante :
les variables dans le programme (les $X_j \neq 0$) écrite en fonction des variables hors programme (les $X_j = 0$).
Dans le programme de base initial, on exprime toujours les variables d'écart en fonction des variables principales. Donc, au départ, ce sont les variables d'écart qui sont dans le programme de base et les variables principales sont hors base ; comme ($X_j=0$), on obtient:
les variables de base égale à(b_i). Donc, la valeur de la fonction économique est égale à zéro

(0); pour une simple raison que les coefficients des variables d'écart sont égaux à zéro.

Le premier programme de base égale à zéro(0) :

Bien qu'il soit réalisable, il n'est pas financièrement attrayant pour l'entreprise. Comme aucun atelier n'est en opérations, on peut évidemment améliorer la valeur de la fonction économique en fabriquant quelques unités de l'un ou de l'autre.

La révision du programme initial:

on doit maintenant examiner la possibilité d'améliorer la valeur de la fonction économique en introduisant l'une ou l'autre des variables principales (une seule variable principale seulement) dans le programme de base et en sortant une variable actuellement dans le programme de base.

Méthode du simplexe

L'idée fondamentale du simplexe : déplacement de sommet en sommet adjacent de manière à améliorer la fonction objectif. Transformation des inégalités en égalités : forme standard du programme linéaire – système de m équations à n inconnues (m < n).

Puisque la solution optimale est un sommet (point extrême), identification algébrique des sommets : correspondance avec les bases d'un système d'équations. Cette méthode passe à partir d'une solution de base admissible à une solution de base voisine qui améliore la valeur de l'objectif, elle présente 3 étapes :

- Détermination de la variable entrante.
- Détermination de la variable sortante.
- Pivotage.

Présentation en tableau

Présentation compacte pour effectuer les calculs sans répéter les systèmes d'équations.

La méthode du simplexe repose sur le théorème fondamental suivant :

Théorème :

- Si un programme linéaire admet une solution possible finie, alors il admet au moins une solution de base.
- Si ce programme linéaire admet une solution optimale, il admet au moins une solution de base optimale (ce qui signifie qu'une solution de base au moins est optimale).

La solution optimale étant une solution de base, l'algorithme du simplexe consiste à :

1. déterminer une solution de base,

2. faire subir un test d'optimalité a cette solution de base pour déterminer s'il s'agit ou non de la solution optimale,

– s'il s'agit de la solution optimale, le problème est terminé,

– s'il ne s'agit pas de la solution optimale, on passe à l'étape 3.

3. changer de solution de base puis reprendre la procédure au 1. Jusqu' à l'obtention de la solution optimale.

Chaque changement de solution de base constitue une itération.

Afin de réaliser les opérations successives de l'algorithme du simplexe, il convient de mettre le programme sous une forme standard.

Critère d'entrée d'une variable dans le programme de base:

Le choix de la variable (actuellement hors programme) à introduire dans le programme s'effectue à l'aide d'un critère qui permet d'améliorer le plus rapidement possible la valeur de la fonction économique, c'est-à-dire, la variable dont la contribution au bénéfice est la plus élevée. On portera évidemment notre choix sur des variables dont les coefficients sont positifs.

À chaque étape de la résolution (chaque programme), nous exprimons la fonction économique en fonction des variables hors programme. Il nous reste maintenant deux choses à déterminer. D'une part, calculer la quantité de la variable entrante que l'on doit fabriquer et d'autre part, quelle variable actuellement dans le programme doit devenir une variable hors programme c'est-à-dire déterminer la variable sortante.

Détermination de la valeur entrante:

Cherchons d'abord la plus grande quantité de la variable entrante que l'on peut fabriquer tout en respectant les conditions imposées par les contraintes d'activité. On répète les itérations jusqu'à ce qu'on trouve la valeur optimale. Un programme de base est optimal si tous les coefficients des variables hors programme, dans l'expression de la fonction économique, sont négatifs.

Détermination de la variable sortante:

En introduisant la variable entrante dans le programme, on choisira la plus petite valeur positive obtenue à l'aide du système d'équations calculé. Cela induira également la variable sortante.

La méthode algébrique présente un inconvénient, tel qu'elle ne répond pas aux développements des techniques de résolution par ordinateur; ce qui nous a amené à faire recours à la méthode de simplexe.

Algorithme du simplexe

La méthode du simplexe est due à G. Dantzig (1947). Elle comporte 2 phases.

Phase 1 - Initialisation : Trouver une solution de base réalisable (ou bien détecter l'impossibilité).

Phase 2 - Progression : On passe d'un sommet `a un sommet voisin pour augmenter la fonction objectif (ou bien on détecte une fonction objectif F non majorée).

L'algorithme du simplexe constitue «une procédure répétitive permettant, de progresser rapidement vers la solution optimale». Elle examine comme première solution un des sommets (en général l'origine), qui constitue la solution de base de l'algorithme. Son principe consiste à «se déplacer de sommet en sommet adjacent de façon à améliorer la fonction objectif; après un nombre fini d'itération, il arrive à un sommet à partir duquel tout déplacement vers un autre sommet n'améliore plus cette valeur, on est alors au sommet optimal, l'algorithme simplexe consiste à passer d'une solution de base à une autre jusqu'à ce
qu'une solution réalisable de base optimal soit trouvée

Principe de l'algorithme de simplexe :

La recherche systématique d'une solution optimale à l'aide de l'algorithme du simplexe peut se résumer comme suit

- ✓ Déterminer une première solution de base réalisable ; cette solution initiale sert de départ au cheminement vers la solution optimale (si elle existe).
- ✓ Si la solution obtenue en (1) n'est pas optimale, déterminer une autre solution de base réalisable qui permettrait d'améliorer la fonction objectif (augmentation pour une maximisation ou diminution pour une minimisation).
- ✓ On répète cette procédure itérative jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'améliorer la fonction objectif. La dernière solution de base réalisable obtenue constitue la solution optimale au programme linéaire.

Exemple

Soit le problème :

$$(P):\begin{cases} Z = 20x_1 + 25x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 40 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 48 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Au préalable, on écrit le problème sous La forme standard de problème (P) est

$$(P):\begin{cases} Z = 20x_1 + 25x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 40 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 48 \\ x_1 \ge 0, x_2, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, \end{cases}$$

Voici les étapes du simplexe.

1. On forme le tableau initial T :

V.B	X1	X2	X3	X4	b	L
X3	2	3	1	0	40	
X4	4	2	0	1	48	
Z	20	25	0	0	0	

Les variables de base sont {x3, x4} et la solution de base est (0, 0, 40, 48) ce qui correspond à l'origine dans le plan.

2. La fonction z varie plus rapidement en fonction de la variable x2. Donc, on choisit la deuxième colonne comme colonne de pivot. La variable x2 entre dans la base mais une variable doit sortir.

3. On doit choisir la ligne de pivot. Pour cela, on utilise le critère de la limitation

$$\frac{b_i}{a_{ij}} = \min\left\{ \frac{b_k}{a_{kj}}, a_{kj} \succ 0, k = 1,\dots, m \right\}$$

O ù j est la colonne de pivot de l'étape 2. Le critère assure que la solution sera admissible.

V.B	X1	X2	X3	X4	b	L
X3 →	2	3	1	0	40	40/3=13.333
X4	4	2	0	1	48	48/2=24
Z	20	25 ↑	0	0	0	

La ligne de pivot sera la premi ère : i = 1. Les variables de base deviennent B ={x2, x4}.

On pivote autour de l'élément 3 on trouve :

V.B	X1	X2	X3	X4	b	L
X2 →	2/3	1	1/3	0	40/3	40/3=13.333
X4	8/3	0	-2/3	1	64/3	64/3=21.33
Z	10/3	0 ↑	-25/3	0	-1000/3	

La solution de base sera x2 = 40/3, x4 = 64/3, x1 = x3 = 0

On choisit la premi ère colonne comme colonne de pivot car x1 est la seule variable qui augmente z.

On applique le crit ère du quotient pour chercher la ligne de pivot et on trouve i = 2. La nouvelle base sera B = {x2, x1}.

V.B	X1	X2	X3	X4	b
X2	0	1	1/2	-1/4	8
X1 →	1	0	-1/4	3/8	8
Z	0 ↑	0	-15/2	-5/4	-360

L'algorithme se termine ici car tous les coefficients des colonnes x1, x2, x3, x4 sont n égatifs. Donc, on ne peut augmenter davantage z. La solution optimale sera
x1 = 8, x2 = 8, x3 = 0, x4 = 0 et z = 360. ce qui correspond au sommet (8, 8) dans le plan. Le signe − dans le coin inférieur droit est dû au fait que l'on avait initialement ajouté la ligne
c − z = 0. Donc, à la fin, on aura −z = −360.

Algorithme du simplexe.

Étape 0. Initialisation

- Écrire le programme linéaire sous standard : Ajouter les variables d'écart.
- Définir une solution de base de départ ; préciser les variables de base et les variables hors base de cette solution. Généralement, les variables d'écart sont pris comme variables de base et les variables de décision comme variables hors base.

Étape 1. Choix de la variable entrante

- Exprimer la fonction objectif z en fonction des seules variables hors base. Puis choisir comme variable entrante la variable hors base affectée du coefficient positif le plus élevé.
- Si tous les coefficients de z sont négatifs ou nuls, l'algorithme s'arrête. La solution courante est optimale.
- Sinon, soit r l'indice de cette variable entrante.

Étape 2. Choix de la variable sortante

La variable sortante est la première à s'annuler lorsque x_r augmente : c'est celle pour laquelle le minimum est atteint dans :

$$\frac{b_i}{a_{ij}} = \min\left\{ \frac{b_k}{a_{kj}}, a_{kj} \succ 0, k = 1,..., m \right\}$$

i est l'indice de la ligne correspondante

Si tous les a_{ij} sont inférieurs à 0, alors la solution est non bornée.

Étape 3. Calcul de la nouvelle solution de base

- Utiliser l'équation relative à la variable xi pour exprimer x_j en fonction de x_i

et les autres variables qui vont rester dans la base.

- Éliminer x_j des autres équations en le remplaçant par son expression.

Retour à l'Étape 1.

II. Problèmes Irréguliers

Dans la partie précédente on a traité les PL de type de maximisation et avec des contraintes de type d'infériorité ou égalité, néanmoins on peut retrouver des contraintes de type supérieur ou égale et/ou de type égale, ainsi que des problèmes où on a à minimiser au lieu de maximiser.
Dans cette partie de chapitre, on étudiera les modifications possibles apportées à la méthode du simplexe pour qu'elle puisse résoudre tous ces types de programmes.

Les variables artificielles

Considérons le programme linéaire(P) suivant :

$$(P):\begin{cases} Z = 5x_1 + 6x_2 \to \max \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ 5x_1 + 3x_2 = 60 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 5, \end{cases}$$

L'introduction des variables d'écart dans le programme linéaire donne

$$(P):\begin{cases} Z = 5x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2 \to \max \\ -x_1 + x_2 + S_1 \leq 4 \\ 5x_1 + 3x_2 = 60 \\ x_2 - S_2 = 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, S_1 \geq 0, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

Lorsque on annule les variables de décision x1 et x2 . Ceci nous permet de commencer à partir de l'origine O. Or, on vérifie bien que l'origine n'est pas une solution réalisable.

Alors comment nous allons réécrire le programme de manière qu'on puisse construire le tableau de simplexe initial à l'origine.

En effet, l'introduction de nouvelles variables, dite variables artificielles A1 et A2.

Ses variables sont conçus artificiellement pour nous aider à utiliser la procédure de simplexe et à formuler le tableau initial à partir de l'origine.

Notre programme devient le suivant :

$$(P):\begin{cases} Z = 5x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2 \rightarrow \max \\ -x_1 + x_2 + S_1 \leq 4 \\ 5x_1 + 3x_2 + A_1 = 60 \\ x_2 - S_2 + A_2 = 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, A_1 \geq 0, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

Si on pose x1 = x2 = 0. La solution initiale est

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ S_1 = 4 \\ S_2 = 0 \\ A_1 = 60 \\ A_2 = 5 \end{cases}$$

Cette solution n'est pas réalisable puisque x_2 n'est pas supérieur à 50.

On peut conclure que tant que les variables artificielles restent dans la base,

Une manière pour garantir que ces variables artificielles sortent de la base avant d'atteindre la solution optimale est de leur associ é un grand co ût -M dans la fonction objectif. Ainsi, si ces variables restent dans la base ils vont causer une diminution importante de la valeur de la fonction objectif. Ce qui nous contraignent à les faire sortir le plut ôt possible de la base.

Notre fonction économique devienne

$$Z = 5x_1 + 6x_2 - MA_1 - MA_2$$

Avec M un tr ès grand nombre

Le tableau de simplexe initial

			5	6	0	0	-M	-M
			x_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2
0	S_1	4	-1	1	1	0	0	0
-M	A_1	60	(5)	3	0	0	1	0
-M	A_2	5	0	1	0	-1	0	1

la variable entrante te la variable sortante :

			5	6	0	0	-M	-M	
			x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2	
0	S_1	4	-1	1	1	0	0	0	-4
-M	A_1	60	(5)	3	0	0	1	0	12
-M	A_2	5	0	1	0	-1	0	1	∞
			-5M	-4M	0	M	-M	-M	
			5+5M	6+4M	0	-M	0	0	

La variable entrante est x1 (5 +5M ≥ 6 + 4M avec M assez grand) et la variable sortante est A1 .
Le tableau de simplexe qui suit est

			5	6	0	0	-M	-M	
			x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2	
0	S_1	4	-1	1	1	0	0	0	-4
-M	A_1	60	(5)	3	0	0	1	0	12
-M	A_2	5	0	1	0	-1	0	1	∞
			-5M	-4M	0	M	-M	-M	
			5+5M	6+4M	0	-M	0	0	

La variable entrante est x1 (5 +5M ≥ 6 + 4M avec M assez grand) et la variable sortante est A1 .
Le tableau de simplexe qui suit est :

			5	6	0	0	-M	-M	
			x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2	
0	S_1	16	0	8/5	1	0	1/5	0	10
5	x_1	12	1	3/5	0	0	1/5	0	20
-M	A_2	5	0	(1)	0	-1	0	1	5
			5	3-M	0	M	1	-M	
			0	3+M	0	-M	-M-1	0	

Le tableau de simplexe après la deuxième itération indique que la variable sortante est A2. On peut supprimer du tableau la colonne relative à A1 et A2.

Les deux premières itérations on fait sortir de la base les variables artificielles A1 et A2. Leurs effets nets est maintenant négatif et très élevé, elles ne pourront donc pas être sélectionnées à l'itération suivante, ni même ultérieurement comme on peut facilement le constater

			5	*6*	*0*	*0*	
			x_1	x_2	S_1	S_2	
0	S_1	*8*	*0*	*0*	*1*	*8/5*	*5*
5	x_1	*9*	*1*	*0*	*0*	*3/5*	*15*
6	x_2	*5*	*0*	*1*	*0*	*-1*	*-5*
			5	*6*	*0*	*-3*	
			0	*0*	*0*	*3*	

			5	*6*	*0*	*0*
			x_1	x_2	S_1	S_2
0	S_2	*5*	*0*	*0*	*5/8*	*1*
5	x_1	*6*	*1*	*0*	*-3/8*	*0*
6	x_2	*10*	*0*	*1*	*5/8*	*0*
			5	*6*	*15/8*	*0*
			0	*0*	*-15/8*	*0*

Le tableau ci-dessus est optimal car tous les effets nets sont négatifs ou nuls. Donc la solution optimale est

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 10 \\ S_1 = 0 \\ S_2 = 5 \end{cases}$$

Cas où le second membre négatif

Le problème qui peut se poser est que l'une des variables du second membre soit négative.
La condition qu'il faut vérifier avant de se lancer dans la réécriture de cette contrainte, en vue de construire le programme standard, est la non négativité du second membre.
Ainsi, on doit modifier la contrainte avant de commencer la standardisation et la réécrire

Problèmes de minimisation

Il y a deux techniques de résoudre un problème de minimisation en utilisant la méthode de simplexe.

La première méthode nécessite le changement de la règle de choix de la variable entrante. Dans un problème de maximisation la règle est de choisir comme variable entrante celle qui a le plus grand effet net positif non nul. Ceci parce que notre objectif est de choisir la variable qui en entrant dans la base va engendrer un profit supplémentaire et ainsi accroître la valeur de la fonction objectif. Pour un problème de minimisation, on va utiliser la règle inverse. C'est-à-dire la variable entrante est celle à laquelle on associe la plus petite valeur négative non nulle de l'effet net cj - zj.
Ceci va nous amener aussi à changer notre règle d'arrêt de la procédure de simplexe et de définir le tableau optimal, comme celui où tous les effets nets cj - zj sont positifs ou nuls.
le tableau suivant résume les transformations à faire subir à notre programme linéaire avant de le résoudre par la méthode de simplexe :

Quand la contrainte est	Pour la fonction objectif d'un problème de	
	Maximisation	Minimisation
I- de type «≤ » Ajouter une variable d'écart	Attribuer un coefficient nul pour la variable d'écart	
II- de type « = » Ajouter une variable d'écart et une variable artificielle	Attribuer un coefficient -M pour variable artificielle	Attribuer un coefficient M pour la variable artificielle
III- de type « ≥ » Ajouter une variable artificielle et une variable d'écart avec un signe "-"	Attribuer un coefficient nul pour la variable d'écart et un coefficient - M pour variable artificielle	Attribuer un coefficient nul pour la variable d'écart et un coefficient M pour variable artificielle

Le tableau suivant résume les étapes de la méthode de simplexe relatif aux problèmes de maximisation et minimisation :

Etape	Maximisation	Minimisation
1	Formuler un programme linéaire pour le problème réel.	Formuler un programme linéaire pour le problème réel.
2	Vérifier que le second membre du programme linéaire est positif sinon modifier les contraintes	Vérifier que le second membre du programme linéaire est positif sinon modifier les contraintes

3	Ecrire le programme linéaire sous une forme standard	Ecrire le programme linéaire sous une forme standard
4	Construire le premier tableau de simplexe	Construire le premier tableau de simplexe
5	Choisir comme variable entrante dans la base celle qui admet le plus grand effet net positif cj-zj.	Choisir comme variable entrante dans la base celle qui admet le plus petit effet net négatif cj-zj.
6	Choisir la variable sortante de la base celle qui admet le plus petit ratio supérieur à zéro.	Choisir la variable sortante de la base celle qui admet le plus petit ratio supérieur à zéro.
7	Construire le nouveau tableau en utilisant la règle de pivot	Construire le nouveau tableau en utilisant la règle de pivot
8	Faire le test d'optimalité. Si (cj-zj) $\leq$ 0 pour toutes les variables (hors base) donc la solution obtenue est optimale. Sinon retourner à l'étape 5.	Faire le test d'optimalité. Si (cj-zj) $\geq$ 0 pour toutes les variables (hors base) donc la solution obtenue est optimale. Sinon retourner à l'étape 5.

La deuxième méthode pour résoudre un problème de se base sur le résultat suivant « Résoudre un problème min $c^t x$ sujet à un ensemble de contraintes est équivalent à résoudre un problème *max* $-c^t x$ sujet au même ensemble de contraintes ». Ces deux problèmes sont équivalents dans la mesure où ils donnent le même vecteur des solutions optimales. La seule différence est que la valeur de la solution *max* $-c^t x$ est l'opposé de la solution de min $c^t x$; (i.e. min $c^t x$= - max $-c^t x$).