Chapitre n=2

Résolution graphique des problèmes de programmation linéaire

Méthodes de résolution des problèmes de programmation linéaire

Les problèmes de programmation linéaire que nous avons présentés dans la section précédente se résolvent à l'aide des méthodes mathématique particulières. Parmi ces méthodes nous citons :

1. La méthode graphique,
2. La méthode d'énumération,
3. La méthode du simplexe.

Dans les parties suivantes nous allons présenter ces méthodes et mettre en exergue leurs avantages et inconvénients.

Quelques définitions et théorèmes (F. DROESBEKE, M. HALLIN, CL.LEFEVRE, Programmation linéaire Par l'exemple, Edition ellipses, 1986).

Dans cette partie de cours nous présentons quelque définition importante notamment

Solution réalisable ou admissible, Espace réalisable ou Polyèdre des contraintes Solution optimale et Valeur optimale.

Théorème.

L'ensemble des solutions réalisables d'un PL détermine dans l'espace des décisions un ensemble convexe (appelé domaine réalisable)[15] qui est soit :

– Un ensemble vide,

– Un polyédrique convexe non borné,

– Un polyédrique convexe.

Théorème.

S'il existe au moins une solution optimale (finie), il existe au moins une solution optimale qui est un sommet du domaine réalisable. Dans le cas où il n'y a que deux (ou trois) variables, il est possible de représenter graphiquement l'ensemble des solutions réalisables et d'en déduire la (les) solution (s) optimale (s) (s'il en existe au moins une).

Représentation graphique des contraintes

Méthode graphique

L'objet principal est de proposer une méthode de résolution d'un problème linéaire ne comportant que deux variables de décision. La méthode consiste en la d´élimination de l'intersection des demi-plans représentant les inéquations des contraintes et en la recherche sur le bord de ce domaine des points donnant l'optimum de la fonction objectif. La représentation graphique des contraintes implique la transformation de la forme canonique à la forme standard qui s'effectue-t-on substituant au signe d'inégalité, les signes d'égalités. Le principe de cette méthode est :

– Tracer les droites correspondantes aux contraintes.

– Déterminer l'ensemble de contraintes en vérifiant le sens des inégalités pour chaque contrainte.

– Tracer les droites correspondantes a la variation de l'objectif. Suivre les déplacements des droites précédentes dans le sens de maximisation de l'objectif.

– Arrêter les déplacements, juste avant que l'intersection avec l'ensemble de contraintes ne devient vide.

– La dernière intersection non vide est l'ensemble de solutions optimales.

Exemple

$$Z = 6x_1 + 4x_2 \longrightarrow \max$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \le 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 55 \\ 2x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Résolution graphique

Dans le cas d'un (PL) à deux variables, on peut envisager une résolution graphique. Les contraintes ou apparaissent des inégalités correspondent géométriquement `a des demi-plans. L'intersection de ces demi-plans forme l'ensemble des variables satisfaisant a toutes les contraintes (la partie hachurée .A la fonction objectif Z correspond une droite $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$ = constante, de coefficient directeur (−1, 6/4). La constante précédente qui définit la droite doit être la plus grande possible (maximisation) et rencontrer l'ensemble des variables qui satisfont les contraintes. Pour déterminer cette valeur maximale, on fait donc "glisser" la droite (translation parallèle à la direction de la droite) du haut vers le bas jusqu’`a rencontrer l’ensemble des variables satisfaisant les contraintes. Le maximum de F sur cet ensemble des contraintes est alors atteint. On obtient ainsi la solution optimale $(x_1, x_2) = (15/2, 5)$ et ce qui donne une valeur maximale max(Z) = 65.

Remarque :
L’ensemble des contraintes (la partie hachurée de la figure) est un polygone convexe et que le maximum de F est atteint en un sommet de ce polygone. Cette observation est, en fait, un résultat général que l’on établira dans les sections suivantes.

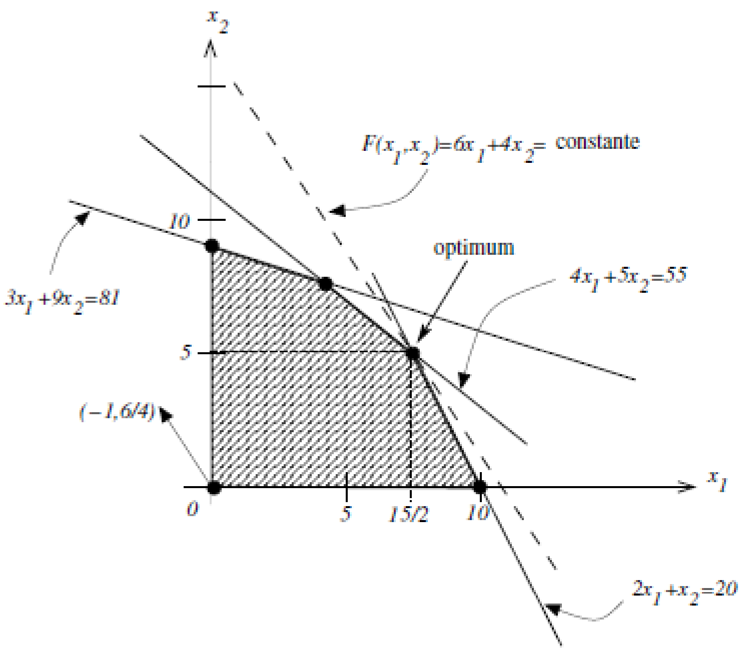


FIG. 2.1 – Résolution graphique du problème de production

Cas général

Soit un programme linéaire P. On admettra les résultats suivants :

1. Le domaine des solutions réalisables de tout programme linéaire à n variables est soit l’ensemble vide ∅ soit une partie convexe de R^n.
2. Dans le cas d’un programme linéaire a deux variables, le domaine des solutions réalisables, lorsqu’il n’est pas vide, est une partie D du plan délimite par un polygone convexe, possédant éventuellement des cotes de longueur infinie.

Dans chaque cas, l’ensemble des solutions optimales (lorsqu’il n’est pas vide) contient un sommet de D, c’est-à-dire que si la fonction objectif a un maximum ou un minimum, il est atteint en au moins un des sommets du polygone délimitant le domaine des solutions réalisables.

3. On admettra que ces résultats se généralisent à un programme linéaire à n variables.

Cas particuliers

Le problème discuté plus haut a une solution optimale et cette solution est unique. Il est Possible de rencontrer des situations différentes. Les trois cas particuliers les plus importants Sont les suivants :

– solutions multiples
– solution non-bornée
– pas de solutions réalisables
Ces configurations peuvent être identifiées facilement sur un graphique.

Exemple :

Considérons le programme suivant :

$$(P')\begin{cases} \max z = & 3x_1 & + & 4x_2 & \\ & 3x_1 & + & x_2 & \leq 15 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq 10 \\ & & & x_2 & \leq 4 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

La solution graphique correspondant à ce programme est illustrée sur la Figure 2.2. Ainsi, tous les points sur le segment [B,C] correspondent à une solution optimale. Remarquons que la fonction objective a la même pente que la deuxième contrainte du problème.
Deux autres cas particuliers peuvent être facilement illustres sur le graphique. En ajoutant la contrainte $x_1+x_2 \geq 10$ le programme donné dans (1.1) n'admet plus de solution réalisable, et donc plus de solution optimale. En retirant la première et la deuxième contrainte du Programme (P) on obtient un PL qui n'admet pas de solution bornée (vérifier ces deux Points graphiquement).

Méthode d'énumération

On remarque que la solution optimale ne peut être que sur le bord du domaine des solutions réalisables. De plus, elle est dans le cas général donnée par un des points anguleux correspondant aux intersections des droites de contraintes. Une telle solution est appelée solution de base. Ceci nous amène à proposer une deuxième méthode qui consiste à :
– Représenter les lignes de contraintes et l'ensemble des solutions réalisables.
– Localiser toutes les solutions de base (les points d'intersection des droites de contraintes).
– Calculer la valeur de la fonction objective en chacun de ces points, et sélectionner la solution optimale.
Cependant cette méthode est très fastidieuse si nous avons à faire à des problèmes ou les points extrêmes sont nombreux ou bien les composantes des vecteurs sont très nombreuses.

Remarque :

Si les variables sont remplacées dans les contraintes par leurs valeurs à l'optimum, alors il y a Egalite entre le membre de droite et de gauche. Les contraintes sont dites satures a l'optimum.

Exemple

Au point O (0, 0); Z = 0
Au point A (0, 120); Z = 1800

Au point B (10, 110); Z = 1900

Au point C (140/3, 0); Z = 3500/3

La solution optimale est donnée par le point B,

Problème de médecine

Un spécialiste en médecine a fabriqué un médicament (des pilules) pour guérir les sujets atteints d'un rhume. Ces pilules sont fabriquées selon deux formats :
Petite taille : elle contient 2 grains d'aspirine, 5 grains de bicarbonate et 1 grain de codéine.
Grande taille : elle contient 1 grain d'aspirine, 8 grains de bicarbonate et 6 grains de codéine.
Pour guérir la maladie, le sujet a besoin de 12 grains d'aspirine, 74 grains de bicarbonate et 24 grains de codéine.
Problème : Déterminer le nombre de pilules minimales à prescrire au sujet pour qu'il soit guérit.
Solution

Modélisation du problème

Etape1 :
Les variables de décision
Soient x_1 et x_2 telle que
x_1 : le nombre de pilules de petite taille à prescrire.
x2 : le nombre de pilules de grande taille à prescrire.
Etape 2 :
Les contraintes
La prescription doit contenir des pilules avec au moins 12 grains d'aspirine. Sachant qu'une petite pilule contient 2 grains d'aspirine et qu'une grande pilule contient un seul grain d'aspirine, on obtient la contrainte suivante : $2x_1 + x_2 \geq 12$.
De la même façon que pour l'aspirine, la prescription du spécialiste en médecine doit contenir au moins 74 grains de bicarbonate. Ainsi la contrainte suivante doit être satisfaite : $5x_1 + 8x_2 \geq 74$.
Finalement la contrainte imposée par le fait que la prescription doit contenir au moins 24 grains de codéine est $x_1 + 6x_2 \geq 24$
Etape 3 :

Contraintes de positivités

Les variables de décision x1 et x2 sont positives : $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$
Etape 4 :La fonction objectif

Le critère de sélection de la quantité de pilules à prescrire est celle qui minimise le nombre total des pilules $z = x_1 + x_2$.

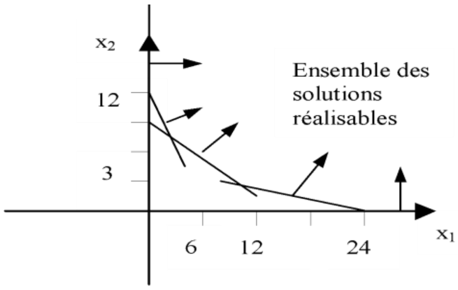
Le modèle de problème sous forme d'un PL

$$\begin{array}{ll} Min & x_1 + x_2 \\ s.c. & 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ & 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\ & x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Pour la résolution graphique

On trace tous les droites représentent les contraintes du problème sur un repaire orthonormé (O,i,j)avec une hachurassions des demis plant qui ne satisfait pas la contrainte. L'ensemble (domaine de solution réalisable et celle d'intersection de tous les demis plans.

Une solution possible du problème est dite réalisable si et seulement si elle vérifie toutes les contraintes, c'est à dire si elle appartient aux trois demi-plans relatifs à chaque contrainte du programme linéaire, en d'autre terme à π1 ∩ π2 ∩ π3 (voir figure).



En trace aussi la droite de la fonction objectif Z

Dans notre exemple, la solution optimale est l'intersection des deux contraintes $2x_1 + x_2 \geq 12$ et $5x_1 + 8x_2 \geq 74$. Une évaluation des coordonnées de ce point revient à résoudre le système linéaire suivant :

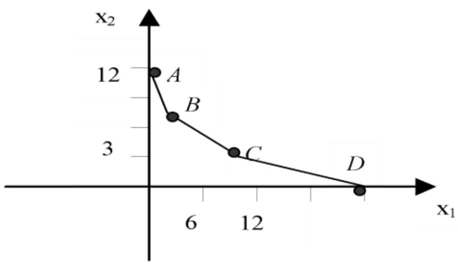
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 12 \\ 5x_1 + 8x_2 = 74 \end{cases}$$

Elle correspond d'après le graphique au point (2,8). Donc la prescription optimale est de 2 pilules de petite taille et 8 pilules de grande taille. Le nombre de pilules (la valeur de la fonction objectif) est égal à 10.

<u>Résolution par énumération</u>

On remarque que la solution optimale du problème de médecine est un point extrême qui se trouve sur le bord de l'ensemble des solutions. Une telle solution est dite solution réalisable de base.

On peut admettre le résultat suivant : « Si un programme linéaire admet une solution optimale alors il existe une solution réalisable de base pour laquelle la fonction objectif atteint la valeur optimale »
Une méthode de résolution du programme linéaire consiste donc à déterminer les solutions réalisables de base (les points d'intersection des droites qui forment les contraintes) et à calculer pour chaque point la valeur de la fonction objectif. La solution du programme linéaire est la solution à qui on associe la valeur optimale de la fonction objectif.



Dans le problème de médecine, l'ensemble des solutions réalisables de base présente 4 points extrêmes A(0,12), B(2,8), C(23/11,126/11) et D(24,0). La valeur de la fonction objective associée respectivement À A, B, C et D est 12, 10, 149/11 et 24. On vérifie bien que B est la solution optimale du problème avec une valeur optimale égale à 10.

Exemples d'application

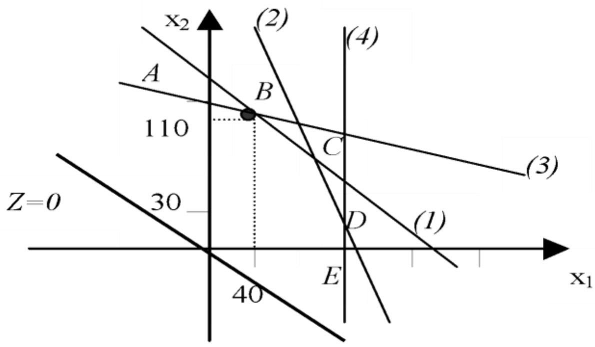
Dans cette section on donne quelques exemples de résolution graphique de problèmes linéaires relatifs au différents cas possibles :

<u>Les problèmes irréguliers</u>

Exemple1

Problème de maximisation

$$
\begin{array}{lll}
Max & 100x_1 + 200x_2 & \\
s.c. & x_1 + x_2 \leq 150 & (1) \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 440 & (2) \\
 & x_1 + 4x_2 \leq 480 & (3) \\
 & x_1 \qquad \leq 90 & (4) \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$



Résultat
la solution optimale est B(40,110)

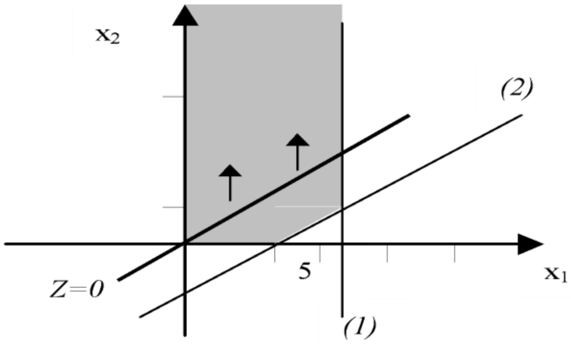
Exemple2

Problème avec solution non bornée

Les problèmes à solution infinie

Graphiquement, ce problème est caractérisé par le fait qu'on peut déplacer la droite de la fonction objectif indéfiniment de manière à accroître la valeur, en gardant toujours une intersection non vide avec l'ensemble des solutions réalisables.

$$
\begin{array}{lll}
Max & -2x_1 + 3x_2 & \\
s.c. & x_1 \leq 5 & (1) \\
 & 2x_1 - 3x_2 \leq 6 & (2) \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$



Résultat

On peut augmenter la valeur de la fonction objectif dans la direction des flèches indéfiniment donc la solution est non bornée

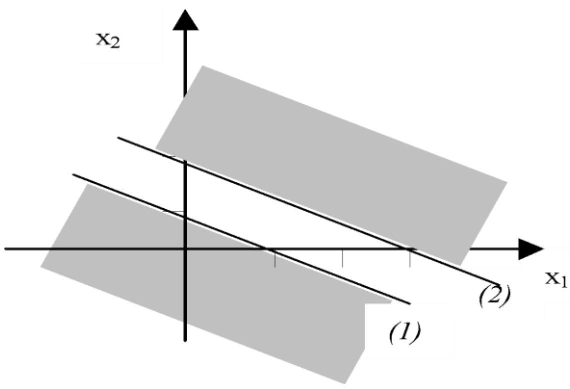
Exemple3

Les problèmes impossibles

Graphiquement, on a caractérisé ces problèmes par un ensemble de solutions réalisables vide. Avec la méthode de simplexe, on reconnaît que le problème est impossible si une ou plusieurs variables artificielles sont présentes dans la base dans le tableau de simplexe optimal, ce qui signifie que la solution donnée par ce tableau n'est pas réellement réalisable.

Problème impossible

$$
\begin{array}{lll}
Min & 3x_1 + 2x_2 & \\
s.c. & x_1 + 2x_2 \leq 2 & (1) \\
 & 2x_1 + 4x_2 \geq 8 & (2) \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$



Résultat

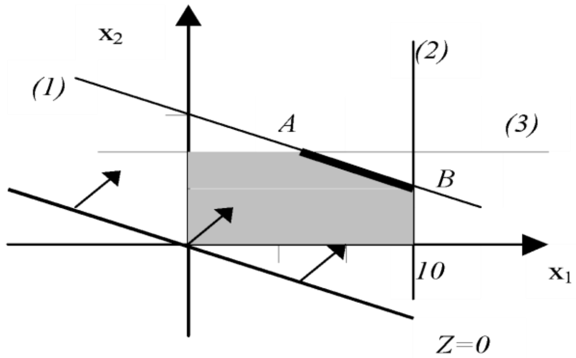
L'espace des solutions réalisables est vide, il est l'intersection des deux zones grises de la figure ci-dessus

Exemple4

Problèmes à solutions multiples

Graphiquement, ce problème est caractérisé par le fait que la pente de la droite représentant la fonction objectif (z = 0) est égale à la pente de l'une des contraintes restrictives. Lorsqu'on utilise la méthode de simplexe, on identifie ce problème lorsqu'un des effets nets (relatif à une variable hors base) est nul. L'exemple de la section 3 du précédent chapitre représente un problème avec solutions multiples.

$$\begin{array}{lll} Max & x_1 + 3x_2 & \\ s.c. & 2x_1 + 6x_2 \leq 30 & (1) \\ & x_1 \leq 10 & (2) \\ & x_2 \leq 4 & (3) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{array}$$



Résultat
L'ensemble des points décrit par le segment [AB] représente les solutions optimales du problème linéaire

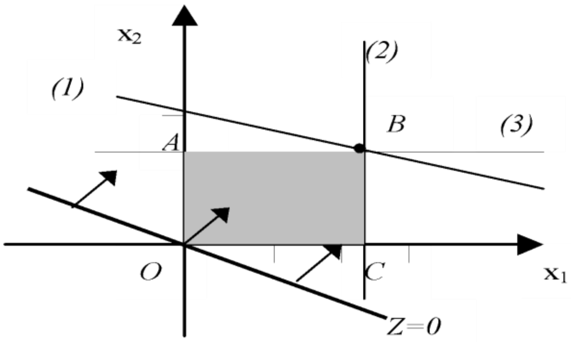
Exemple5

Les problèmes à solution dégénérée

Graphiquement, on appelle solution dégénérée le point où plusieurs contraintes concourent (un nombre supérieur ou égale à trois contraintes). Un programme linéaire est dit dégénéré si une ou plusieurs variables dans la base optimale sont nulles. Dans la résolution graphique ce problème n'est pas difficile à résoudre, mais avec la méthode de simplexe il peut causer des difficultés.

Problème de dégénérescence

$$\begin{array}{lll} Max & x_1 + x_2 & \\ s.c. & 3x_1 + 2x_2 \leq 40 & (1) \\ & x_1 \leq 10 & (2) \\ & x_2 \leq 5 & (3) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & \end{array}$$



Résultat
La solution optimale B(10,5) est dite dégénérée si trois contraintes concourent en ce point.

Variable d'écarts

Proposition

Tout PL sous forme standard s'écrit de façon équivalente en un PL sous forme canonique pure et inversement.

Solutions de base réalisables

On considère désormais (sauf mention contraire) un PL toujours sous forme standard.

Définition

On appelle solution réalisable tout vecteur x qui satisfait les contraintes du PL i.e. tel Que $Ax = b$ et $x \geq 0$.

Définition

Soit $B \subset \{1, \cdots, n\}$ un ensemble d'indices avec card (B) = m tel que les colonnes Aj ,
$j \in B$, de A sont linéairement indépendantes. Autrement dit, la matrice carrée AB formée des colonnes
Aj , $j \in B$, est inversible. On dit que l'ensemble B des indices est une base.

• Les variables $x_B = (xj , j \in B)$ sont appelées variables de base.

• Les variables $x_H = (xj , j \notin B)$ sont appelées variables hors-base.

Remarques.

– Sous l'hypothèse de rang plein, il existe toujours une base non vide.

– Quitte à renuméroter les indices, on peut toujours écrire les décompositions par blocs :

$A = (A_B \mid A_H)$ ou A_H est la matrice formée des colonnes Aj , j n'appartient pas à B

$x = (x_B \mid x_H)^T$

Le système $Ax = b$ est équivalent a

$A_Bx_B + A_Hx_H = b$.

Par la relation précédente et du fait que la matrice A_B est inversible, on peut fixer les variables hors-base et les variables de base sont alors complètement déterminées.

Définition

On dit que $x = (x_B \mid x_H)^T$ est solution de base associée à la base B si $x_H = 0$.

Propriétés

Propriétés des solutions de base réalisables : Si $x = (x_B \mid x_H)^T$ est une solution de base réalisable alors $x_H = 0$ et $x_B = A^{-1}{}_B b$.

Exemple.

Reprenons l'exemple du problème de production de l'introduction. Sous forme standard (en introduisant des variables d'écart), le PL s'écrit.

On a m = 3, n = 5, rang(A) = m = 3. Une base est donnée par B = {3, 4, 5} avec AB = matrice unité ou de base

La solution de base réalisable correspondante est $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (0 ,0,81,55,20)^T$
Avec $x_H = 0$ et $x_B = A^{-1}{}_B b$.

Remarque.
Il y a au plus $C^m{}_n$ solutions de base (toutes ne sont pas réalisables).

Propriétés géométriques des solutions de base réalisables
On note
$D_R = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$,
L'ensemble des solutions réalisables d'un PL sous forme standard.
Commençons par rappeler les notions de polyèdre et d'ensemble convexe :
• Un polyèdre Q de R^n est défini par $Q = \{x \in R^n \mid Ax \leq b\}$ ou A est une matrice m × n.
• Un ensemble E est dit convexe si $\forall x, y \in E, \lambda x + (1 - \lambda)y \in E$ pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$.

Proposition
L'ensemble D_R des solutions réalisables est un polyèdre convexe, ferme.

Définition
Un point $x \in D_R$ est un sommet (ou point extrême) si et seulement s'il n'existe pas
$y, z \in D_R$, $y \neq z$ tels que $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ avec $0 < \lambda < 1$.

Théorème
x est une solution de base réalisable si et seulement si x est un sommet de D_R.

Théorème
L'optimum de la fonction objectif f sur D_R, s'il existe, est atteint en au moins un sommet de D_R.

Remarques

1. L'ensemble DR n'est pas nécessairement borné. En fait pour un PL, 3 situations (et seulement 3) peuvent se produire :
   - DR = ∅ : le PL n'a pas de solution.
   - $D_R \neq \emptyset$ mais la fonction objectif f n'est pas majorée sur D_R : le maximum de f vaut $+\infty$. Si D_R est borne, ce cas est exclu.
   - $D_R \neq \emptyset$ et la fonction objectif f est majorée sur DR : le PL admet une solution optimale (non nécessairement unique).
2. On a vu qu'il y a au plus $C^m n$ solutions de base réalisables. Pour déterminer une solution de base, on doit résoudre un système linéaire ($x_B = A^{-1}{}_B.b$). La résolution d'un système linéaire par une méthode directe de type Gauss/LU requière de l'ordre de m^3 opérations. Si on explore toutes les solutions de base et que l'on compare les couts correspondants, on éffectué de l'ordre de $m^3C^m n$ opérations.

Ce nombre est vite très grand avec n et m. Par exemple, avec n = 20 et m = 10, on a 3.10^8 opérations. Dans la méthode du simplexe, on va explorer seulement les sommets qui permettent d'augmenter la fonction objective. On va réduire ainsi le nombre de solution de base à explorer et donc le nombre de système linéaire à résoudre.