# Chapitre 1 : Généralité sur la recherche opérationnelle

# Et la Programmation Linéaire

## Introduction général

## 1. Recherche opérationnelle

Une définition possible de la R.O pourrait être la suivante : il s'agit d'un ensemble de méthodes d'analyse scientifique (maths et info.) des phénomènes d'organisation qui traite de la maximisation d'un profit, d'une performance, d'un rendement ou bien de la minimisation d'un cout, d'une dépense. La R.O. est avant tout un outil d'aide à la décision. Le schéma général suivi par ces méthodes est : Problème concret (de type R.O)
1- Modélisation
2- Résolution par une méthode de R.O
3-Interprétation des résultats
4- Prise de décision.

### Quelques exemples et domaines d'applications de la R.O.

- Les ponts de Konigsberg (Euler 1735).
- Graphe et PageRank
- Un problème de production
- Un problème de transport.
- Un problème d'affectation.
- Un problème de voyageur de commerce.
- Placement optimal de pièces 2D (Bin Packing).

## 2. Programmation linéaire

La programmation linéaire est une technique qui permet de résoudre un grand nombre de problème de gestion. Cette technique consiste à modéliser le problème posé sous forme d'un modèle linéaire, ensuite, elle assure la résolution du problème, enfin, l'interprétation des résultats obtenus.
En effet, la modélisation linéaire est généralement liée à des contraintes d'allocations des ressources limitées et à la meilleure façon possible d'exploiter, afin de maximiser le profit
Ou de minimiser les coûts de revient. Donc, le problème que l'on se pose est de réaliser les
Objectifs d'une entreprise sujette à des restrictions des ressources.

En R.O, modéliser un problème consiste à identifier les variables intrinsèques, les différentes contraintes auxquelles sont soumises ces variables et l'objectif vise (optimisation). Dans un problème de programmation linéaire (PL) les contraintes et l'objectif sont des fonctions linéaires des variables.

La programmation linéaire est un outil très puissant de la recherche opérationnelle. C'est un outil générique qui peut résoudre un grand nombre de problèmes. En effet, une fois un problème modélisé sous la forme d'équations linéaires, des méthodes assurent la résolution du problème de manière exacte. On distingue dans la programmation linéaire, la programmation linéaire en nombres réels, pour laquelle les variables des équations sont dans IR+ et la programmation en nombres entiers, pour laquelle les variables sont dans IN. Bien entendu, il est possible d'avoir les deux en même temps. Cependant, la résolution d'un problème avec des variables entières est nettement plus compliquée qu'un problème en nombres réels.
Une des méthodes les plus connues pour résoudre des programmes linéaires en nombre réel est la méthode du Simplex. En théorie, elle a une complexité non polynomiale et est donc supposée peu efficace. Cependant, en pratique, il s'avère au contraire qu'il s'agit d'une bonne méthode.
De plus, de nombreux logiciels intégrant cette méthode existent. Certains sont utilisés via une interface graphique alors que d'autres permettent une communication par fichiers ce qui autorise l'utilisation du programme de manière cachée dans le développement d'un autre logiciel.

## Problématique de la programmation linéaire

Un programme linéaire est un programme mathématique, i.e. un problème consistant à trouver un extremum (maximum ou minimum) d'une fonction à plusieurs variables, vérifiant en outre un système d'équations ou d'inéquations, ces fonctions étant linéaires. La fonction à optimiser est appelée fonction coût, fonction d'objectifs ou fonction économique.

## Définition d'un PL

Nous allons citer quelques définitions attribuées par des différents auteurs à la notion de la programmation linéaire, ensuite nous allons donner une synthèse de définition.

**Michel NEDZELA**

La programmation linéaire s'applique à la répartition des ressources limitées entre des activités en concurrence les unes avec les autres, de façon à atteindre au mieux un certain objectif .

**Gérald BAILLARGEON:**

La programmation linéaire peut se définir comme un outil mathématique qui permet d'analyser divers types de situations dans lesquelles nous retrouvons une fonction linéaire d'un certain nombre de variables, appelée fonction objectif (on utilise également dans la littérature les termes fonction économique) que l'on désire optimiser, c'est-à-dire maximiser ou minimiser.

**Jean-Philippe JAVET**

La programmation linéaire peut se définir comme une technique mathématique permettant de résoudre des problèmes de gestion et particulièrement ceux où le gestionnaire doit déterminer, face à différentes possibilités, l'utilisation optimale des ressources de l'entreprise pour atteindre un objectif spécifique comme la maximisation des bénéfices ou la minimisation des coûts

## Définition d'un programme linéaire.

Un programme linéaire est un modèle d'optimisation mathématique qui a pour objectif de trouver le maximum ou le minimum d'une forme linéaire dite fonction objectif en satisfaisant certaines égalités et/ou inégalités dites contraintes. En langage mathématique, on décrira le modèle de la manière suivante:

$$(P):\begin{cases} Max\ ou\ Min(Z) = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_ix_j + ... + C_nx_n \\ a_{11}x_1 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n\,(\leq,\geq,=)b_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n\,(\leq,\geq,=)b_2 \\ ........................................................ \\ a_{i1}x_1 + .... + a_{ij}x_j + ... + a_{im}x_m\,(\leq,\geq,=)b_i \\ ........................................................ \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n\,(\leq,\geq,=)b_m \\ x_1, x_2,..., x_j,..., x_n \geq 0 \end{cases}$$

Soient:

- $[X_1, X_2,\ldots X_j,\ldots,X_n]$ représentent les variables d'activités; suivant l'hypothèse que ces variables sont positives, impliquent que $X_1, X_2,\ldots., X_j,\ldots\ldots X_n \geq 0$.
- La fonction objectif a une forme linéaire en relation avec les variables de décision du type Max ou Min (Z) = $C_1X_1+C_2X_2+\ldots\ldots+C_jX_j+\ldots.C_nX_n$. Où les coefficients $[C_1,\ldots C_2,\ldots C_j,,\ldots. ,C_n]$ doivent avoir une valeur bien déterminée (avec certitude) et peuvent être positifs, ou négatifs. Par exemple le coefficient ($C_j$) peut représenter un profit unitaire lié à la quantité de la production ($X_j$), ainsi, la valeur de la fonction (Z) est le profit total lié à la production $[X_1, X_2,\ldots..,X_j,\ldots.,X_n]$.
- Supposons que ces variables d'activités doivent vérifier un système d'équations linéaires défini par (m) inégalités et (n) variables; où les coefficients techniques sous la forme de la matrice (m×n) suivante :

$a_{11}, a_{12},\ldots..,a_{1j},\ldots\ldots,a_{1n}$
$a_{21}, a_{22},\ldots..,a_{2j},\ldots\ldots,a_{2n}$
…………………………
$a_{i1}, a_{i2},\ldots\ldots.,a_{ij},,\ldots..,a_{in}$
..................................
$a_{m1}, a_{m2},\ldots\ldots a_{mj},\ldots\ldots a_{mn}$

et le vecteur colonne $[b_1, b_2,\ldots\ldots,b_i,\ldots,b_m]$ qui, doit avoir une valeur bien déterminée (avec certitude) et peut être positif ou nul. Le paramètre ($b_i$) représente la quantité des ressources disponibles dont le bien ($X_j$) utilise une quantité égale à $[a_{ij}\ x_j]$. «Les constants (à savoir, les coefficients et les côtés de droite) dans les contraintes et la fonction objectif sont appelés les paramètres du modèle.

Le processus utilisé par la recherche Opérationnelle est le suivant :

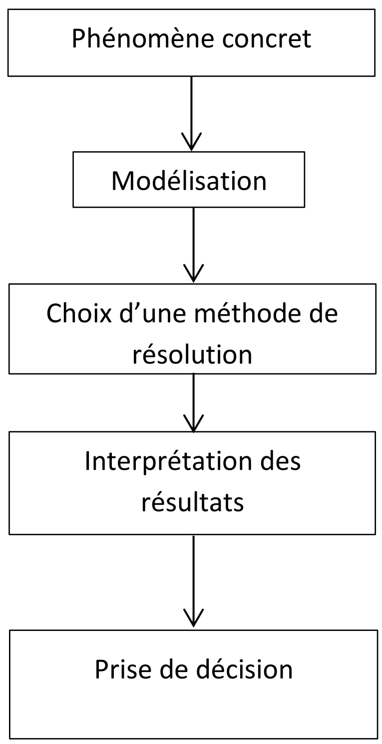



Figure 1 : processus utilisé par RO

## II. Modélisation des problèmes sous forme d'un Programmation linéaire

En R.O, modéliser un problème consiste à identifier les variables intrinsèques, les différentes contraintes auxquelles sont soumises ces variables et l'objectif visent (optimisation). Dans un problème de programmation linéaire (PL) les contraintes et l'objectif sont des fonctions linéaires des variables.

## Modèle mathématique

Un modèle mathématique est un outil et un moyen qui permet à simuler un problème, situation ou un phénomène réel pour mieux le comprendre et de le résoudre. En vue de l'optimisation, résoudre un modèle par une méthode consiste à chercher des solutions concrètes dites décisions optimales. On RO on a deux types déterministe et celle de stochastique. Le modèle déterministe se décompose on deux grand famille linéaire et non linéaire.

Pour l'optimisation linéaire on trouve graphes, réseaux, programmation en nombres entiers, transport et d'affectation,…

Pour l'optimisation non linéaire on trouve les modèles probabilistes, processus aléatoires, les files d'attentes, modèles de prévision et la théorie des jeux...

# Formulation d'un programme linéaire

Etant donné un problème économique, en vue de l'optimisation, pour modéliser ce problème sous forme d'un PL, il faut identifier soigneusement les trois étapes suivantes :

## **Définition 1 (**Variables de décisions**).**

Ce sont les facteurs que l'on peut modifier dans le système, elles décrivent les inconnus du problème et représentent des quantités utiles sur lesquelles des décisions seront prisent.

## **Définition 2 (**Contraintes et contraintes de positivités**).**

Ce sont les paramètres du système étudié et sur lesquels on ne peut apporter aucune modification. Elles regroupent toutes les restrictions et conditions imposées au problème posé sous forme d'inégalités ou d'égalités ($\leq$; $\geq$; $=$).

## **Définition 3 (**Fonction objectif**).**

Constitue la fonction à optimiser ou bien l'objectif à atteindre.

Généralement il y a trois étapes à suivre pour pouvoir construire le modèle d'un programme linéaire :
1. Identifier les variables du problème à valeur non connues (variable de décision) et les représenter sous forme symbolique (exp. x1, y1 ).
2. Identifier les restrictions (les contraintes) du problème et les exprimer par un système d'équations linéaires.
3. Identifier l'objectif ou le critère de sélection et le représenter sous une forme linéaire en fonction des variables de décision. Spécifier si le critère de sélection est à maximiser ou à minimiser.

**Exemple 1 (série 1 .exo01)**

Une usine fabrique 2 produits P1 et P2 en utilisant un certain nombre de ressources : équipement, main d'œuvre, matières premières. Ces besoins sont indiqués dans le tableau ci-dessous. Par ailleurs, chaque ressource est disponible en quantité limitée (cf. tableau).

| | $P_1$ | $P_2$ | Disponibilités |
|---|---|---|---|
| équipement | 3 | 9 | 81 |
| main d'œuvre | 4 | 5 | 55 |
| matière première | 2 | 1 | 20 |

Les deux produits $P_1$ et $P_2$ rapportent à la vente respectivement des bénéfices de 6 euros et 4 euros par unité.

**Question**

Quelles quantités de produits $P_1$ et $P_2$ (valeurs non-nécessairement entières) doit produire l'usine afin de maximiser le bénéfice total venant de la vente des 2 produits ?

## Solution

Choix des variables (les inconnues) : $x_1$ et $x_2$ sont respectivement les quantités des produits $P_1$ et $P_2$ fabriques ($x_1$, $x_2$ 2 R).

• **Choix de la fonction objectif à maximiser** : La fonction objective F correspond au bénéfice total. Elle vaut $F(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$. Le problème se traduit donc par max $(x_1,x_2)$ $f(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$ qui doit être maximiser

**Détermination des contraintes.**

- La disponibilité de chacune des ressources s'écrit :

$3x_1 + 9x_2 \leq 81$
$4x_1 + 5x_2 \leq 55$
$2x_1 + x_2 \leq 20$

- Positivité des variables : $x_1, x_2 \geq 0$.

En résume, le problème de production se modélisé sous la forme

Max $_{(x_1,x_2)}$ $f(x_1, x_2) = 6x_1 + 4x_2$.

sous les contraintes :

$3x_1 + 9x_2 \leq 81$
$4x_1 + 5x_2 \leq 55$
$2x_1 + x_2 \leq 20$
$x_1, x_2 \geq 0$

**Exemple 2:**

Considérons le problème d'une commune. Dans la commune, il y a I quartiers, J écoles, et G classes dans chaque école (p.ex. 1ere – 6e primaire). Chaque école $j \in J$ a une capacité de Cjg étudiants pour la classe $g \in G$. Dans chaque quartier $i \in I$, il y a Sig étudiants qui veulent aller en classe $g \in G$. La distance entre le quartier $i \in I$ et l'école $j \in J$ est dij .

**Problème**

Donner un programme linéaire, dont l'objectif est d'envoyer tous les étudiants à la bonne classe, tout en minimisant la distance totale parcourue par les étudiants.

**Solution**

Nous utilisons les variables suivantes :

$x_{ijg}$ = nombre d'étudiants résidant dans le quartier i, qui vont à la classe g de l'école j.

Alors on peut formuler le problème de la manière suivante :

$$\min \sum_i \sum_j (d_{ij} . \sum_{g \in G} x_{ijg})$$

*sous contraintes*

$$\sum_j x_{ijg} = S_{ig} \ \forall\, i, g \ (\textit{cette contraite segnifie que tout etudiant du quartier } i \textit{ fréquente sa classe } g)$$

$$\sum x_{ijg} \leq C_{jg} \ \forall\, j, g (\textit{cette contraint e ségnifie que dans chaque école } j$$

$$\textit{la capacité de toute classe } g \textit{ est réspecté})$$

$$x_{ijg} \in N, \forall i, j, g$$

**Exemple 3:**

Considérons le problème suivant :

$$\min \; 2x_1 + 3\,|x_2 - 10|$$

s.c:

$$|x_1 + 2| + |x_2| \leq 15$$

### Problème

Reformuler ce problème sous forme de programme linéaire.

### Solution

On introduit une variable auxiliaire z1 pour remplacer la valeur absolue dans la fonction objective.

$$\min \; 2x_1 + 3Z_1$$

$$st\begin{cases} Z_1 \geq x_2 - 10 \\ Z_1 \geq -x_2 + 10 \\ x_1 + 2 + x_2 \leq 15 \\ x_1 + 2 - x_2 \leq 15 \\ -x_1 - 2 + x_2 \leq 15 \\ -x_1 - 2 - x_2 \leq 15 \end{cases}$$

### Problème de médecine

Un spécialiste en médecine a fabriqué un médicament (des pilules) pour guérir les sujets atteints d'un rhume. Ces pilules sont fabriquées selon deux formats :
Petite taille : elle contient 2 grains d'aspirine, 5 grains de bicarbonate et 1 grain de codéine.
Grande taille : elle contient 1 grain d'aspirine, 8 grains de bicarbonate et 6 grains de codéine.
Pour guérir la maladie, le sujet a besoin de 12 grains d'aspirine, 74 grains de bicarbonate et 24 grains de codéine.

**Problématique**

Déterminer le nombre de pilules minimales à prescrire au sujet pour qu'il soit guérit.

### Solution

**Etape1** : les variables de décision
$x_1$ : le nombre de pilules de petite taille à prescrire.
$x_2$ : le nombre de pilules de grande taille à prescrire.

**Etape2 :** les contraintes

La prescription doit contenir des pilules avec au moins 12 grains d'aspirine. Sachant qu'une petite pilule contient 2 grains d'aspirine et qu'une grande pilule contient un seul grain d'aspirine, on obtient la contrainte suivante : . $2x_1 + x_2 \geq 12$

De la même façon que pour l'aspirine, la prescription du spécialiste en médecine doit contenir au moins 74 grains de bicarbonate. Ainsi la contrainte suivante doit être satisfaite : .
$5x_1 + 8x_2 \geq 74$
Finalement la contrainte imposée par le fait que la prescription doit contenir au moins 24 grains de codéine est . $x_1 + 6x_2 \geq 24$

**Etape3 : Contraintes de positivités**
Les deux variables de décision sont positifs ou nulles $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

**Etape4 :**
On remarque qu'il y a plusieurs couples de solutions $(x_1, x_2)$ qui peuvent satisfaire les contraintes spécifiées à l'étape 2. La prescription doit contenir le minimum possible de pilules. Donc le critère de sélection de la quantité de pilules à prescrire est celle qui minimise le nombre total des pilules. $Z = x_1 + x_2$

Le programme linéaire est :

$$
\begin{array}{ll}
Min & x_1 + x_2 \\
s.c. & 2x_1 + x_2 \geq 12 \\
 & 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\
 & x_1 + 6x_2 \geq 24 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

# Serie1

## Modélisation des problèmes sous forme d'un PL

### Exercice01

Une usine fabrique 2 produits $P_1$ et $P_2$ en utilisant un certain nombre de ressources : équipement, main d'œuvre, matières premières. Ces besoins sont indiqués dans le tableau ci-dessous. Par ailleurs, chaque ressource est disponible en quantité limitée (cf. tableau).

| | $P_1$ | $P_2$ | Disponibilités |
|---|---|---|---|
| équipement | 3 | 9 | 81 |
| main d'œuvre | 4 | 5 | 55 |
| matière première | 2 | 1 | 20 |

Les deux produits $P_1$ et $P_2$ rapportent à la vente respectivement des bénéfices de 6 euros et 4 euros par unité.

**Question**

Quelles quantités de produits $P_1$ et $P_2$ (valeurs non-nécessairement entières) doit produire l'usine afin de maximiser le bénéfice total venant de la vente des 2 produits ?

### Exercice02

Un artisan menuisier fabrique des tables et des chaises à base du bois et d'un métal pour le compte d'un revendeur, il emploie deux jeunes stagiaires. Son stock pour la semaine à venir en bois est 60 $m^2$ et 30 mettre du métal. La fabrication d'une table nécessite 3h du travail et 5 m2 du bois et 2m du métal, et pour fabriquer une chaise il faut 1.5 h du travail et 2 $m^2$ du bois et 1m du métal. Le menuiser et ses stagiaires travaillent 40 h par semaine, une chaise génère le profit de 2000 DA et une chaise dégage un profit de 1200 DA. Toute sa production sera vendue le lendemain.

**Question** : Modéliser ce problème sous forme d'un programme linéaire afin de maximiser le bénéfice hebdomadaire?

### Exercice03

Une entreprise produit deux types de ceintures A et B. Le type A est de meilleure qualité que B. le bénéfice est de 200 DA pour le type A et de 150 DA pour le second type. Le temps de fabrication pour le type A est le double du temps pour la fabrication du type B et si toutes les ceintures étaient du type B l'entreprise pourrait en fabriquer 1000 par jour. L'approvisionnement en cuir est suffisant pour 1400 ceintures par jour (Type A et B), 800 boucles de type A et 900 pour le type B sont disponibles par jour.

**Question :** Modéliser ce Problème afin de maximiser le bénéfice total.

### Exercice04

On doit organiser un pont aérien pour transporter 1600 personnes et 90 tonnes de bagages. Les avions disponibles sont de deux types: 12 du type A et 9 du type B. Le type A peut transporter, à pleine charge, 200 personnes et 6 tonnes de bagages. Le type B, 100 personnes et 6 tonnes de bagages. La location d'un avion du type A coûte 800.000 F; la location d'un avion du type B coûte 200.000 F.

**Question :** Trouver une formulation au problème sus-définit, pour trouver le nombre optimal d'avions de type A et du type B pour minimiser le coût de location.

**Exercice05**

Considérons le problème d'une commune. Dans la commune, il y a I quartiers, J écoles, et G classes dans chaque école (p.ex. 1ere – 6e primaire). Chaque école j ϵ J a une capacité de Cjg étudiants pour la classe g ϵ G. Dans chaque quartier i ϵ I, il y a Sig étudiants qui veut aller en classe g ϵ G. La distance entre le quartier i ϵ I et l'école j ϵ J est dij .

**Problème**

Donner un programme linéaire, dont l'objectif est d'envoyer tous les étudiants à la bonne classe, tout en minimisant la distance totale parcourue par les étudiants.

**Exercice06**

Un oléiculteur désire exporter deux types de l'huile d'olive, huile d'olive ordinaire et huile d'olive de haute qualité. Compte tenu des réglementations en vigueur des exportations, il n'a la possibilité de vendre qu'au maximum 5000 litres de l'huile ordinaire et 1000 litres de l'huile de qualité par année. Il propose à ses clients trois types de packs (fardeaux).

- Pack 1 est composé de deux bouteilles (1litre) d'huile simple et de quatre bouteilles d'huile de qualité. La marge brute par pack 1 est de 4 euro.
- Pack 2 est composé de six bouteilles d'huile de qualité. La marge brute par pack 2 est de 10 euro.
- Pack 3 est composé de six bouteilles d'huile ordinaire. La marge brute par pack 3 est de 3 euro.

**Question :**

Aider cet oléiculteur à savoir combien de pack de chaque type doit-il constituer afin de maximiser son bénéfice annuel?

**Exercice07**

Une entreprise d'investissement souhaite investir exactement 100000 dollars dans 3 projets différents, elle souhaite investir 60000 dollars dans l'achat d'un bien immobilier qui génère un bénéfice de 2900 dollars et dans l'achat d'actions boursières qui coûtent 2000 dollars/action et dégage un profit de 800 dollars/action et dans l'achat de lot de terrain qui coûtent 300 dollars/m2 et
génère un profit de 100 dollars.

**Question :**

Modéliser ce problème afin de trouver le profit maximum de cet investissement?

**Les différentes formes d'un programme linéaire**

On trouve souvent deux formes de programme linéaires. La forme canonique et la forme standard. La première représente la forme initiale, elle se caractérise par des contraintes linéaires sous forme des inéquations (≤ , ≥) ou d'équations (=) comportant (j) variables et (i) contraintes comme suit:

Maximiser ou minimiser selon l'objectif une fonction économique (Z):

$$(P):\begin{cases}(Optimiser)\ Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_ix_j + \ldots + C_nx_n \\ a_{11}x_1 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n\ (\leq,\geq,=) b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n\ (\leq,\geq,=) b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + \ldots. + a_{ij}x_j + \ldots + a_{im}x_m\ (\leq,\geq,=) b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n\ (\leq,\geq,=) b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n \geq 0\end{cases}$$

Avec :

$x_j$ variables de décision

$b_i$ second membre ou les disponibilités

$C_j$ coéfficients de la fonction objectif

$a_{ij}$ coéfficients des contraintes

**Forme générale d'un programme linéaire**

$$Opt\ Z = \sum_{j=1}^{j=n} C_j x_j$$

$sc$ :

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}x_j \leq b_i\ avec\ i \in I = \{1,2,\ldots,m\} \\ \sum_{j=1}^{j=n} a_{kj}x_j \geq b_k\ avec\ k \in K = \{1,2,\ldots,m\} \\ \sum_{j=}^{j=n} a_{rj}x_j = b_r\ avec\ r \in R = \{1,2,\ldots,m\} \\ L_j \leq x_j \leq U_j\ avec\ j = 1,\ldots,n\end{cases}$$

$Opt : Max\ ou\ Min$

Avec $I, K\ et\ R$ disjoints et $I \cup K \cup R = \{1,2,\ldots,m\}$

$L_j = -\infty\ et\ U_j = +\infty\ possible$

**La forme canonique:**

Un programme linéaire est dit sous forme canonique si :
a) Les contraintes sont sous forme des inégalités d'infériorités et la fonction objectif est exprimée sous forme de maximisation.
b) Les contraintes sont sous forme des inégalités de supériorité et la fonction objectif est exprimée sous forme de minimisation.
c) Les contraintes sont sous forme des inégalités d'infériorités, des inégalités de supériorités et des égalités, et la fonction objectif est exprimée sous forme de maximisation ou de minimisation.

On peut obtenir la forme canonique pour n'importe quel programme linéaire à travers des transformations des contraintes.
Sous cette forme, il n'y a pas de contraintes d'Egalite c'est-à-dire I2 = vide et J2 = vide
On note :

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n \\ c = (c_1, c_2, ..., c_n)^T \in R^n \\ b = (b_1 b, ..., b_m)^T \in R^m \end{cases}$$

Et la matrice A de taille m × n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Un programme linéaire (PL) est dit sous forme canonique pure s'il s'écrit :

$$\max\left[F(x) = c^T x = c_1 x_1 + ... + c_n x_n\right]$$
$$\textit{sous les contraintes}$$
$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

**Forme canonique mixte**

Il s'agit d'un problème de programmation linéaire (encore appelé programme linéaire) écrit sous la forme suivante.

$$\max_{(x_1,\dots,x_m)}\left[F(x_1,\dots,x_n)=c_1x_1+\dots+c_nx_n=\sum_{j=1}^{j=n}c_jx_j\right]$$

*sous les contraintes*

$$\begin{cases} contraintes\ inégalités : \forall i \in I_1, \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}x_j \le b_i \\ contraintes\ égalités\ \forall j \in I_2, \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}x_j = b_i \\ contraintes\ de\ signes\ \forall j \in J_1\ , x_j \ge 0 \\ \forall j \in J \in J_2, x_j\ de\ signe\ quelconque \end{cases}$$

L'ensemble $I = I_1 \cup I_2$ est l'ensemble des indices de contraintes avec card(I) = m. Autrement dit, il y a m contraintes. L'ensemble $J = J_1 \cup J_2$ est l'ensemble des indices des variables avec card(J) = n. Il y a n variables.

**Forme canonique d'un programme linéaire**

$$Max\ Z = \sum_{j=1}^{j=n} C_j x_j$$

$sc:$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij}x_j \le b_i\ avec\ i = 1,\dots,m \\ x_j \ge 0\ avec\ j = 1,\dots,n \end{cases}$$

- Problème de maximisation
- Toutes les contraintes sont de type « ≤ »
- Toutes les variables sont non négatives

**La forme standard**

Un programme linéaire et dit sous forme standard quand les inégalités représentant les contraintes sont transformées en égalités. Ceci s'effectue par l'introduction des variables d'écarts pour type de contraintes (≥ , ≤ ) et variables artificielles pour type de contraintes (=).
«Un problème est sous la forme standard si seulement si les vraies contraintes sont toutes des égalités9». Les vraies contraintes désignent les contraintes du programme hormis les contraintes logiques, en d'autres termes ce sont les contraintes opérationnelles.
Sous cette forme, I1 = vide ; et J2 =vide ; Un programme linéaire (PL) est dit sous forme standard s'il s'écrit :

$$\max\left[F(x) = c^T x\right]$$

*sous les contraintes*

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

**Forme standard d'un programme linéaire**

$$Max\ Z = \sum_{j=1}^{j=n} C_j x_j$$

$sc:$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} x_j = b_i \ avec\, i = 1,\dots,m \\ x_j \geq 0 \ avec\ j = 1,\dots,n \end{cases}$$

- Problème de maximisation
- Toutes les contraintes sont de type « =» ou équations
- Toutes les variables sont non négatives

## De la forme canonique vers *la forme* standard

On passe de la forme canonique a la forme standard en ajoutant dans chaque contrainte *i* une variable l'écart $x_{n+i}$.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_j \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + x_{n+i} = b_i$$

$$\begin{array}{llllll} \text{Max} & z = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & + \sum_{i=1}^{m} 0 x_{n+i} & & \\ \text{s.c.} & & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & + \ x_{n+i} & = b_i & i = 1,\dots,m \\ & & & x_j & \geq 0 & j = 1,\dots,n+m \end{array}$$

## Pourquoi des formes particulières ?

Tous simplement on fait ces formes pour

• Vérifier les prérequis des méthodes de résolution d'un telle problème.
• Simplifier la présentation des algorithmes et des méthodes de résolution des problèmes
Cependant...
Les définitions des formes canonique et standard varient parfois d'un auteur à l'autre !

Dans cette polycopie, la forme de référence sera la forme canonique présentée ci-dessus, dont les variables seront appelées les variables de décision du problème et la forme standard sera toujours obtenue par l'ajout de variables d'écart au problème canonique.

**Notation matricielle : forme canonique**

$$\begin{array}{lrcl} \text{Max} & z = & \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} & \\ \text{s.c.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} & \leq & \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array} \quad \left[\begin{array}{lrcl} \text{Max} & z = & \boldsymbol{c_D}\boldsymbol{x_D} & \\ \text{s.c.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x_D} & \leq & \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x_D} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array}\right]$$

où

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c_D} = (c_1 \ \ldots \ c_n), \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_D} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

**Notation matricielle : forme standard**

$$\begin{array}{lrcl} \text{Max} & z = & \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} & \\ \text{s.c.} & [\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}]\,\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array} \quad \left[\begin{array}{lrcrcl} \text{Max} & z = & \boldsymbol{c_D}\boldsymbol{x_D} & + & 0\boldsymbol{x_E} & \\ \text{s.c.} & & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x_D} & + & \boldsymbol{I}\boldsymbol{x_E} & = \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x_D} & , & \boldsymbol{x_E} & \geq \boldsymbol{0} \end{array}\right]$$

où

$$\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c_D} \mid \boldsymbol{c_E}) = (\boldsymbol{c_D} \mid \boldsymbol{0}) = (c_1 \ \ldots \ c_n \mid 0 \ \ldots \ 0)$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_D} \\ - \\ \boldsymbol{x_E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ - \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

**Notation matricielle : exemple**

Pour le problème d'allocation de ressources

$$\begin{array}{llrcrcr} \text{Max} & z = & 50\,000x_1 & + & 200\,000x_2 & & \\ \text{s.c.} & & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 21 \\ & & -4x_1 & + & 6x_2 & \leq & 0 \\ & & x_1 & & & \leq & 15 \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

on a

$$c = \begin{pmatrix} 50\,000 & 200\,000 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

**Forme matricielle:**

On appelle un système d'équations linéaires, tout système composé de (m) équations à (n) inconnues devant être vérifiées simultanément et dont l'écriture matricielle est de la forme suivante:

Max ou Min (Z) = $C_1X_1+C_2X_2+\ldots+C_jX_j+\ldots+C_nX_n$.

Sous contraintes :

$$\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}+\ldots\ldots+a_{1n} \\ a_{21}+a_{22}+\ldots\ldots+a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}+a_{m2}+\ldots\ldots+a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \leq, =, \geq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

## Remarques sur les notations

- Les symboles en gras ($\mathbf{A}, \boldsymbol{x}, \mathbf{0}, \ldots$) sont réservés pour les matrices (majuscules) et les vecteurs (minuscules).
- Les vecteurs doivent être interprétés comme des vecteurs-colonnes ou des vecteurs-lignes selon le contexte (pas ou peu de signes transposés).

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \text{ vecteur-colonne} \qquad \boldsymbol{y}\mathbf{A} : \boldsymbol{y} \text{ vecteur-ligne}$$

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} : \text{produit scalaire}$$

- Les inégalités entre vecteurs (matrices) doivent être comprises composantes par composantes :

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \iff x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

Mais $\boldsymbol{x} \ngeq \mathbf{0} \iff \exists\, i$ t.q. $x_i < 0$

On dit de plus que le PL est sous forme standard *simpliciale* si $A$ de taille $m \times n$ avec $m \leq n$, se décompose en :

$$A = \begin{pmatrix} I_m \mid H \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

où $I_m$ désigne la matrice identité de taille $m \times m$ et $H$ est une matrice de taille $m \times (n - m)$.

**Equivalence des formulations canonique et standard**

**Théorème 1**
Au prix éventuel de l'ajout de contraintes et/ou de variables, tout PL peut être transforme en un PL sous forme canonique équivalent.

**Théorème 2**
Au prix éventuel de l'ajout de contraintes et/ou de variables, tout PL peut être transforme en un PL sous forme standard équivalent.

Par programme équivalent, on entend :
• toute solution admissible (optimale) du problème équivalent correspond à une solution admissible (optimale) du problème initial ;
• toute solution admissible (optimale) du problème initial correspond a au moins une solution admissible (optimale) du problème équivalent ;

• l'issue de l'optimisation des deux problèmes est la même (sans solution admissible, optimum fini, problème non borné).

## Règles de transformation

- Minimisation ↔ maximisation : $\min f(x) = -\max(-f(x))$

  Pour minimiser $z = cx$, il suffit de maximiser $w = -cx = (-c)x$ et de multiplier la valeur optimale de $w$ par $-1$ pour obtenir celle de $z$.

- Inéquation "$\geq$" ↔ inéquation "$\leq$" :

$$ax \geq b \iff (-a)x \leq -b$$

- Équation → inéquation "$\leq$" :

$$ax = b \iff \begin{cases} ax & \leq & b \\ ax & \geq & b \end{cases} \iff \begin{cases} ax & \leq & b \\ (-a)x & \leq & -b \end{cases}$$

## Règles de transformation (suite)

- Inéquation → équation : On ajoute une variable d'écart (de surplus)

$$\begin{aligned} ax \leq b &\iff ax + s = b, s \geq 0 \\ ax \geq b &\iff ax - s = b, s \geq 0 \end{aligned}$$

- Variable libre (réelle) → variable non négative : Tout nombre réel peut être écrit comme la différence de deux nombres non négatifs.

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+, x^- \geq 0 \end{cases}$$

- Variable bornée inférieurement :

$$x \geq b \iff \begin{cases} x = x' + b \\ x' \geq 0 \end{cases}$$

## Exemple de mise sous forme canonique

$$\begin{array}{llcccccl} \text{Min} & z = & -3x_1 & + & 4x_2 & & & \\ \text{s.c.} & & x_1 & + & x_2 & = & 6 & \\ & & x_1 & - & 2x_2 & \geq & 4 & \qquad \text{PL initial} \\ & & x_1 & & & \in & \mathbb{R} & \\ & & & & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

Modifications

$$\begin{array}{lcl} \text{Min } z = -3x_1 + 4x_2 & \rightarrow & \text{Max } w = 3x_1 - 4x_2 \\ x_1 + x_2 = 6 & \rightarrow & \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 - x_2 \leq -6 \end{cases} \\ x_1 - 2x_2 \geq 4 & \rightarrow & -x_1 + 2x_2 \leq -4 \\ x_1 \in \mathbb{R} & \rightarrow & \begin{cases} x_1 = x_1^+ - x_1^- \\ x_1^+, x_1^- \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

PL initial

$$\begin{array}{llcccccc} \text{Min} & z = & -3x_1 & + & 4x_2 & & \\ \text{s.c.} & & x_1 & + & x_2 & = & 6 \\ & & x_1 & - & 2x_2 & \geq & 4 \\ & & x_1 & & & \in & \mathbb{R} \\ & & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

PL canonique équivalent

$$\begin{array}{llcccccccc} \text{Max} & w = & 3x_1^+ & - & 3x_1^- & - & 4x_2 & & \\ \text{s.c.} & & x_1^+ & - & x_1^- & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & -x_1^+ & + & x_1^- & - & x_2 & \leq & -6 \\ & & -x_1^+ & + & x_1^- & + & 2x_2 & \leq & -4 \\ & & x_1^+ & , & x_1^- & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Ne pas oublier que $z_{opt} = -w_{opt}$ ! !

## Règles de transformation particulières

- Problème Min-Max ou Max-Min :

$$\text{Min} \quad z = \max\{c_1x, \ldots, c_kx\} \iff \begin{array}{llcl} \text{Min} & z = & t & \\ \text{s.c.} & & t & \geq c_1x \\ & & & \ldots \\ & & t & \geq c_kx \\ & & t & \in \mathbb{R} \end{array}$$

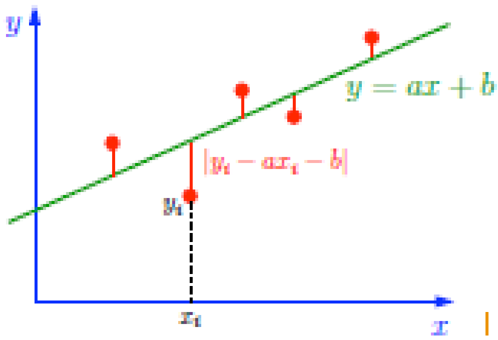
- Valeurs absolues : $|x| \leq b \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x & \leq & b \\ x & \geq & -b \end{array} \right.$


### Exemple : approximation de Chebychev

Données : $m$ mesures

$$(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^{n+1}, i = 1, \ldots, m$$

Objectif : Déterminer une approximation linéaire $y = ax + b$ minimisant la plus grande erreur d'estimation.




Formulation :

$$\text{Min } z = \max_{i=1,\ldots,m} \{ |y_i - ax_i - b| \}$$

Les variables de décision de ce problème sont $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ !

On peut récrire le problème comme

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & z = & \max_{i=1,\ldots,m} \{\Delta_i\} \\ \text{s.c.} & \Delta_i = & |y_i - \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i - b| \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & z = & t \\ \text{s.c.} & t \geq & |y_i - \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i - b| \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

pour finalement obtenir une formulation linéaire

$$\begin{array}{llll} \text{Min} & z = t & & \\ \text{s.c.} & t \geq & y_i - \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i - b & i = 1, \ldots, m \\ & t \geq & -y_i + \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i + b & i = 1, \ldots, m \end{array}$$

avec $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$.

**Objectifs**

• Connaıtre les définitions des formes canonique et standard d'un PL.
• Maıtriser les règles de transformations permettant de passer d'une formulation à une autre équivalente.
• Pourvoir transformer une formulation non linéaire d'un problème d'optimisation en un programme linéaire (lorsque c'est possible évidemment).

**Exemples**

$$\begin{array}{lcl} \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 & & \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 - 8x_3' \\ \text{sous:} & & \text{sous:} \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 & & 5x_1 - 2x_2 - 4x_3' \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 & \Rightarrow & x_1 + 3x_2 - 8x_3' \leq 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 & & 9x_1 + 6x_2 + 3x_3' \leq 17 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ et } x_3 \leq 0 & & x_1, x_2, x_3' \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\ \\ \text{sous:} \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 \\ x_1 , x_2 \geq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3' - 8x_3'' \\ \\ \text{sous:} \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3' - 4x_3'' \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3' - 8x_3'' \leq 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3' + 3x_3'' \leq 17 \\ x_1 , x_2 , x_3' , x_3'' \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\ \\ \text{sous:} \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17 \\ x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\ \\ \text{sous:} \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\ -9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -17 \\ x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\ \\ \text{sous:} \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 17 \\ x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\ \\ \text{sous:} \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17 \\ x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\ \\ \text{sous:} \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25 \\ 9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17 \\ -9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -17 \\ x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \end{array}$$

**Interprétation économique.**

Un programme linéaire a une interprétation économique très large :
1. Un acteur économique qui exerce n activités avec des intensités $x_j$ a déterminé.
2. Ces activités utilisent m ressources.
3. La quantité $a_{ij}$ de ressources i nécessaires pour exercer l'activité j avec une intensité 1.
4. On connait le profit (en maximisation) et le cout (en minimisation).
5. $c_j$ correspond à une intensité 1 de l'activité j.