2 Mesure extérieure

On introduit la notion de mesure extérieure. Ce nouveau type de mesure présente l'avantage de pouvoir être défini sur tous les sous-ensembles d'un ensemble donné X, a priori donc sans structure de tribu. L'inconvénient est qu'une mesure extérieure dispose de bien moins de propriétés . Mais dans la section suivante, les mesures extérieures seront un outil pour construire des (vraies) mesures intéressantes (en particulier la mesure de Lebesgue).

Définition 2.1.1 (Mesure extérieure) *On appelle mesure extérieure toute fonction d'ensemble μ^* positive, définie pour tous les sous-ensembles E de X telle que*

— $\mu^*(\emptyset) = 0$;

— *μ^* est monotone, ie. $A \subset B$ implique $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$;*

— *μ^* est σ-sous-additive, ie. si $(E_i)_{i\ge 1}$ est une famille dénombrable quelconque alors*

$$\mu^*\Big(\bigcup_{i\ge 1} E_i\Big) \le \sum_{i\ge 1} \mu^*(E_i).$$

On associe à une mesure extérieure une notion de mesurabilité :

Définition 2.1.2 (μ^*-mesurabilité) *Un ensemble E est dit μ^*-mesurable si pour tout sous-ensemble A de X, on a*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{2.1}$$

ie. E est μ^*-mesurable si tout ensemble se décompose additivement relativement à μ^*. On note $\mathcal{S}_{\mu^*}$ la famille des ensembles μ^* mesurables.

Comme l'autre sens est due à la sous-additivité, il suffit de montrer $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ pour établir (2.1).

Proposition 2.1.1 *Soient $E, F \in \mathcal{S}_{\mu^*}$ et $A \subset X$.*

1. $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap F^c) + \mu^*(A \cap E^c \cap F) + \mu^*(A \cap E^c \cap F^c)$;
2. $\mu^*\big(A \cap (E \cup F)\big) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E^c \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap F^c)$;
3. *Si E, F sont de plus disjoints alors*

$$\mu^*\big(A \cap (E \cup F)\big) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F).$$

Démonstration : 1) Comme E est μ^*-mesurable, on a

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \tag{2.2}$$

Puis comme F est μ^*-mesurable, on a

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap E) &= \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap F^c) && (2.3) \\ \mu^*(A \cap E^c) &= \mu^*(A \cap E^c \cap F) + \mu^*(A \cap E^c \cap F^c) && (2.4) \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat en reportant (2.3), (2.4) dans (2.2).
2) vient de 1) en écrivant remplaçant A par $A \cap (E \cup F)$ et en utilisant

$$A \cap (E \cup F) \cap E \cap F = A \cap E \cap F, \quad A \cap (E \cup F) \cap E^c \cap F^c = \emptyset.$$

3) suit immédiatement de 1) avec $E \cap F = \emptyset$. □

Proposition 2.1.2 *Si μ^* est une mesure extérieure, la famille $\mathcal{S}_{\mu^*}$ des μ^*-mesurables est une σ-algèbre. Si $(E_i)_{i \geq 1}$ est une suite d'ensembles disjoints de $\mathcal{S}_{\mu^*}$ et $E = \bigcup_{i \geq 1} E_i$ alors $\mu^*(E) = \sum_{i \geq 1} \mu^*(E_i)$. Ainsi, la restriction $\mu = \mu^*_{|\mathcal{S}_{\mu^*}}$ de μ^* à $\mathcal{S}_{\mu^*}$ est une mesure sur $\mathcal{S}_{\mu^*}$.*

Démonstration : On commence par montrer que $\mathcal{S}_{\mu^*}$ est une σ-algèbre. Il suit immédiatement de la définition de μ^* que si $E \in \mathcal{S}_{\mu^*}$ alors $E^c \in \mathcal{S}_{\mu^*}$ si bien que $\mathcal{S}_{\mu^*}$ est stable par complémentaire.
Puis, si $E, F \in \mathcal{S}_{\mu^*}$ et $A \subset X$ alors d'après la Prop. 2.1.1, on a

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*\big(A \cap (E \cup F)\big) + \mu^*(A \cap E^c \cap F^c) \\ &= \mu^*\big(A \cap (E \cup F)\big) + \mu^*\big(A \cap (E \cup F)^c\big) \end{aligned}$$

si bien que $E \cup F \in \mathcal{S}_{\mu^*}$ et donc $\mathcal{S}_{\mu^*}$ est une algèbre (non vide car $X \in \mathcal{S}_{\mu^*}$). Pour montrer que $\mathcal{S}_{\mu^*}$ est une σ-algèbre, il reste à établir la stabilité par union dénombrable.

En fait, il suffit de voir la stabibilité par union dénombrable d'ensembles disjoints car une union dénombrable $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ s'écrit comme une union dénombrable disjointe $\bigcup_{n \geq 1} B_n$ avec $N_n \in \mathcal{S}_{\mu^*}$ quand $A_n \in \mathcal{S}_{\mu^*}$: en effet, on écrit d'abord $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} C_n$ avec les

$C_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ croissants, puis on prend $B_1 = C_1 = A_1$, $B_2 = C_2 \setminus C_1, \dots B_n = C_n \setminus C_{n-1}$, les B_n sont bien disjoints (croissance des C_n) et $\bigcup_{k=1}^n B_k = \bigcup_{k=1}^n C_k = \bigcup_{k=1}^n A_k$ donc $\bigcup_{n\geq 1} B_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n$; puis comme $\mathcal{S}_{\mu^*}$ est une algbre, si les A_n sont dans $\mathcal{S}_{\mu^*}$, alors les C_n aussi (stabilité par union finie) et les $B_n = C_n \cap C_{n_1}^c$ aussi (stabilité par intersection et par complémentaire).

On montre donc que si $(E_i)_{i\geq 1}$ est une suite d'ensembles disjoints de $\mathcal{S}_{\mu^*}$ alors $E = \bigcup_{i\geq 1} E_i \in \mathcal{S}_{\mu^*}$. Par récurrence, d'après la Prop. 2.1.1, on a

$$\mu^*\Big(A \cap \bigcup_{i=1}^n E_i\Big) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cup E_i).$$

En écrivant $F_n = \bigcup_{i=1}^n E_i$, on a $F_n \in \mathcal{S}_{\mu^*}$ (car c'est une algèbre) et donc pour tout A, on a

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap F_n^c)\\
&= \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap F_n^c)\\
&\geq \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c)
\end{aligned}$$

puisque $E^c \subset F_n^c$ et μ^* est monotone. Comme cela est vraie pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &\geq \sum_{i\geq 1} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c) \qquad (2.5)\\
&\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

puisque $A \cap E = \bigcup_{i=1}^{+\infty}(A \cap E_i)$ et par σ-sous-additive $\mu^*(A \cap E) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_i)$. L'inégalité obtenue est complétée par sous-additivité de μ^* pour avoir une égalité et prouver que $E \in \mathcal{S}_{\mu^*}$. Ainsi, $\mathcal{S}_{\mu^*}$ est stable par union dénombrable disjointe et union dénombrable quelconque. Il s'agit donc bien d'une σ-algèbre.

Pour montrer que μ^* est une mesure, noter que comme $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$, les inégalités dans (2.5) sont en fait des égalités et donc pour toute suite $(E_i)_{i\geq 1}$ d'ensembles disjoints de $\mathcal{S}_{\mu^*}$ avec $E = \bigcup_{i\geq 1} E_i$, on a

$$\mu^*(A) = \sum_{i\geq 1} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Avec $A = E$, le dernier terme s'annule et on a $A \cap E_i = E_i$, soit

$$\mu^*(E) = \sum_{i\geq 1} \mu^*(E_i),$$

ie. μ^* est bien σ-additive et donc une mesure, ce qui achève de prouver le theorème. □

Proposition 2.1.3 *La tribu des mesurables $\mathcal{S}_{\mu^*}$ d'une mesure extérieure μ^* est complète pour la mesure $\mu = \mu^*_{|\mathcal{S}_{\mu^*}}$ induite.*

Démonstration : Soient $A \in \mathcal{S}_{\mu^*}$ tel que $\mu(A) = \mu^*(A) = 0$ et $B \subset A$. Par croissance de μ^*, on a $\mu^*(E \cap B) \leq \mu^*(E) \leq \mu^*(A) = 0$ et donc $\mu^*(E \cap B) = 0$. Puis par sous-additivité et croissance comme $E = (E \cap B) \cup (E \cap B^c)$, on a :

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) = \mu^*(E \cap B) \leq \mu^*(E) \tag{2.7}$$

on a donc égalité dans (2.7) et $B \in \mathcal{S}_{\mu^*}$. On a alors $\mu(B) = \mu^*(B) \leq \mu^*(A) = \mu(A) = 0$, soit $\mu(B) = 0$. $\square$