Cours
ANALYSE 1
1e Année MI

I Le corps des nombres réels

I.1 Le groupe (R,+)

On admet l'existence d'un ensemble, noté $\mathbb{R}$, contenant l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, dont les éléments sont appelés *nombres réels*, muni de deux opérations $+$ (addition) et $\times$ (produit, noté par juxtaposition : xy plutôt que $x \times y$) et d'une relation d'ordre total $\leq$, qui "étendent" toutes trois celles de $\mathbb{N}$, et qui vérifient les propriétés P_1, P_2, P_3, P_4, et P_5, que nous allons passer en revue.

P_1 : Propriétés de l'addition

$$\begin{cases} \text{Commutativité : } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y=y+x \\ \text{Associativité : } \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+(y+z)=(x+y)+z. \\ \text{L'entier 0 est élément neutre : } \forall x \in \mathbb{R},\ x+0=x. \\ \text{Tout réel } x \text{ possède un unique "opposé" } y \text{ vérifiant : } x+y=0. \text{ Il est noté } y=-x. \end{cases}$$

On exprime les propriétés P_1 en disant que $(\mathbb{R},+)$ est un *groupe commutatif*.

Remarques et notations

- Pour tous réels x et y, on note $y - x$ plutôt que $y + (-x)$.
  On définit ainsi une nouvelle opération sur $\mathbb{R}$ (*soustraction*) qui ne présente que très peu d'intérêt : elle n'est ni commutative, ni associative, et il n'y a pas d'élément neutre.
- On vérifie la propriété : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, -(x + y) = -x - y$.
- Pour toute partie A de $\mathbb{R}$, on note $-A = \{-x,\ x \in A\}$.
- On note $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$. Les éléments de $\mathbb{Z}$ sont appelés *entiers relatifs*.
  On pose $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
- La commutativité et l'associativité de la loi $+$ ont pour conséquence qu'on peut envisager des sommes $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ sans parenthèses et sans se préoccuper de l'ordre des termes.
  Une telle somme est notée $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$.

3

I.2 L'anneau (R,+,x)

P_2 : **Propriétés du produit**

$$\begin{cases} \text{Commutativité : } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = yx. \\ \text{Associativité : } \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x(yz) = (xy)z. \\ \text{Distributivité par rapport à l'addition : } \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x(y+z) = xy + xz. \\ \text{1 est neutre pour le produit : } \forall x \in \mathbb{R},\ x1 = x. \end{cases}$$

On exprime les propriétés P_1 et P_2 en disant que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un *anneau commutatif.*

Remarques

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x0 = 0$. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x(-y) = (-x)y = -(xy)$.
- La commutativité et l'associativité de $\times$ font qu'on peut considérer un produit $x_1 x_2 \cdots x_n$ sans utiliser de parenthèses ni tenir compte de l'ordre des termes.
  Un tel produit est noté $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k$.
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ est *stable* pour les lois $+$ et $\times$: $\forall (n,p) \in \mathbb{Z}^2, n + p \in \mathbb{Z}$ et $np \in \mathbb{Z}$.
  Muni des *restrictions* des lois de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ a lui-même une structure d'anneau commutatif.

4

Exposants entiers positifs

Pour tout x réel, on définit par récurrence les puissances x^n de x, avec $n \in \mathbb{N}$:

On pose : $x^0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $x^{n+1} = x^n\, x$.

Alors : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $1^n = 1$, et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $0^n = 0$.

On démontre par récurrence les propriétés suivantes :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\,(n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad \begin{cases} (xy)^n = x^n\, y^n \\ x^n\, x^p = x^{n+p} \\ (x^n)^p = x^{np} \end{cases}$$

I.3 Le corps (R,+,x)

On note $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ l'ensemble des réels non nuls. Il contient $\mathbb{Z}^*$ et donc $\mathbb{N}^*$.

P_3 **: Inversibilité des réels non nuls**

$$\begin{cases} \text{Tout réel non nul } x \text{ possède un unique “inverse” } y, \text{ vérifiant } xy = 1. \\ \text{Ce réel est noté } y = x^{-1} \text{ ou } y = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

On exprime les propriétés P_1, P_2, P_3 en disant que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un *corps commutatif.*

5

Propriétés

- $\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ -x \in \mathbb{R}^*$ et $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$
- $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*,\ xy \in \mathbb{R}^*$ et $(xy)^{-1} = x^{-1}\, y^{-1}$.
- $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R},\ xy = 0 \Leftrightarrow (x = 0)$ ou $(y = 0)$.

On note habituellement : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}^*, xy^{-1} = x\dfrac{1}{y} = \dfrac{x}{y}$.

Une telle notation est rendue possible car le produit est une opération commutative.

6

I.4 Nombres rationnels ou irrationnels

Définition

On note $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*\right\}$, et $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont appelés *nombres rationnels.*

Remarques

- L'ensemble $\mathbb{Q}$, qui contient $\mathbb{Z}$, est stable pour les lois $+$ et $\times$.
- Muni des restrictions de ces lois, il est lui-même un corps commutatif.
- En particulier l'inverse de tout élément de $\mathbb{Q}^*$ est encore dans $\mathbb{Q}^*$.

Définition

Les éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont appelés *nombres irrationnels.*

7

I.5 Relation d'ordre

P_4 : Propriétés de la relation d'ordre

$$\begin{cases} \text{Compatibilité avec l'addition :} \\ \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z. \\ \text{Compatibilité avec le produit par un réel positif ou nul :} \\ \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x \leq y) \text{ et } (0 \leq z) \Rightarrow xz \leq yz. \end{cases}$$

On résume P_1 à P_4 en disant que $\mathbb{R}$ est un *corps commutatif totalement ordonné.*

8

Remarques et notations

- Toute partie minorée non vide de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit élément.
- Toute partie majorée non vide de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.
- On note bien sûr, pour tous réels x et y : $\begin{cases} x < y \Leftrightarrow (x \leq y) \text{ et } (x \neq y) \\ x \geq y \Leftrightarrow y \leq x \\ x > y \Leftrightarrow y < x \end{cases}$
- On pose $\mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$, $\mathbb{R}^{+} = \mathbb{R}^{+*} \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$.
  On définit de la même manière $\mathbb{Z}^{+*}$, $\mathbb{Z}^{+}$, $\mathbb{Q}^{+*}$, et $\mathbb{Q}^{+}$.
- On pose $\mathbb{R}^{-*} = \{x \in \mathbb{R},\ x < 0\}$, $\mathbb{R}^{-} = \mathbb{R}^{-*} \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\}$.
  On définit de la même manière $\mathbb{Z}^{-*}$, $\mathbb{Z}^{-}$, $\mathbb{Q}^{-*}$, et $\mathbb{Q}^{-}$.
- Le tableau ci-après résume les *règles des signes*

x	≥ 0	≤ 0	≥ 0	> 0	< 0	> 0	> 0	> 0	< 0	< 0
y	≥ 0	≤ 0	≤ 0	> 0	< 0	< 0	≥ 0	≤ 0	≥ 0	≤ 0
$x+y$	≥ 0	≤ 0	?	> 0	< 0	?	> 0	?	?	< 0
xy	≥ 0	≥ 0	≤ 0	> 0	> 0	< 0	≥ 0	≤ 0	≤ 0	≥ 0

9

On démontre également les propriétés suivantes, pour tous réels x, y, z :

$$\begin{cases} x + z \leq y + z \Leftrightarrow x \leq y & x + z < y + z \Leftrightarrow x < y \\ x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x & x < y \Leftrightarrow -y < -x \\ x \leq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0 & x < 0 \Leftrightarrow -x > 0 \\ x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0 & x < 0 \Leftrightarrow x^{-1} < 0 \\ 0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1} & x < y < 0 \Rightarrow y^{-1} < x^{-1} < 0 \\ (x \leq y \text{ et } z \leq 0) \Rightarrow xz \geq yz & x^2 \geq 0 \\ (x < y \text{ et } z > 0) \Rightarrow xz < yz & (x < y \text{ et } z < 0) \Rightarrow xz > yz \end{cases}$$

10

I.6 Exposants entiers relatifs

Pour tout réel non nul x, et tout entier relatif strictement négatif m, on pose $x^m = (x^{-m})^{-1}$.
On connait donc maintenant le sens de x^m, pour tout x de $\mathbb{R}^*$ et tout m de $\mathbb{Z}$.

Propriétés

$$\begin{array}{l} \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \\ \forall\,(n,p) \in \mathbb{Z} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{lll} (xy)^n = x^n\,y^n, & x^n\,x^p = x^{n+p} & \\ \dfrac{1}{x^n} = x^{-n} & \dfrac{x^n}{x^p} = x^{n-p} & (x^n)^p = x^{np} \end{array} \right.$$

Parité et monotonie

L'application $x \to x^m$ est paire si m est pair, et impaire si m est impair.

$$\text{Sur } \mathbb{R}^{+*}\text{, elle est } \left\{ \begin{array}{l} \text{strictement croissante si } m > 0, \\ \text{strictement décroissante si } m < 0, \\ \text{constante (valeur 1) si } m = 0. \end{array} \right.$$

Le tableau ci-après indique ce que devient l'inégalité $x < y$ par élévation à la puissance $m-$ième.

$m \in \mathbb{Z}^*, x, y \in \mathbb{R}^*$	$m > 0$, pair	$m > 0$, impair	$m < 0$, pair	$m < 0$, impair
$0 < x < y$	$0 < x^m < y^m$	$0 < x^m < y^m$	$0 < y^m < x^m$	$0 < y^m < x^m$
$x < y < 0$	$0 < y^m < x^m$	$x^m < y^m < 0$	$0 < x^m < y^m$	$y^m < x^m < 0$

I.7 Intervalles de R

Pour tous réels a et b, on définit les ensembles suivants, dits *intervalles* de $\mathbb{R}$.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} [a,b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} & , & [a,b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\} \\ ]a,b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\} & , &]a,b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\} \\ ]-\infty,+\infty[= \mathbb{R} & & \\ [a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\} & , &]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\} \\ ]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\} & , &]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\} \end{array} \right.$$

$$\text{En particulier : } \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}^+ = [0,+\infty[, & \mathbb{R}^{+*} =]0,+\infty[\\ \mathbb{R}^- =]-\infty,0], & \mathbb{R}^{-*} =]-\infty,0[\end{array} \right.$$

Remarques et définitions

- On dit que $[a, b]$ (avec $a \leq b$) est le *segment* d'origine a et d'extrémité b.
- Les intervalles $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$ et $]-\infty, \infty[$ sont dits *ouverts*.
- Les intervalles $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ et $]-\infty, \infty[$ sont dits *fermés*.
- Les intervalles $]a, b]$ et $[a, b[$ sont dits *semi-ouverts* (ou *semi-fermés* !).
- Le segment $[a, a]$ se réduit à $\{a\}$; L'intervalle $]a, a[$ est vide.
- Seuls les intervalles $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ et $]a, b[$ sont bornés.
- Les segments sont les intervalles fermés bornés.

Proposition

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle $\Leftrightarrow$ elle est *convexe* c'est-à-dire $\forall\,(x, y) \in I \times I, [x, y] \subset I$.

13

I.8 Droite numérique achevée

Définition

On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Cet ensemble est appelé *droite numérique achevée*.

Relation d'ordre sur $\overline{\mathbb{R}}$

On munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'un ordre total $\leq$ prolongeant celui de $\mathbb{R}$ et défini en outre par :
$\forall x \in \mathbb{R}, -\infty \leq x \leq +\infty$ (en fait $-\infty < x < +\infty$).

Opérations sur $\overline{\mathbb{R}}$

De même, on "étend" (de façon toujours commutative) les lois $+$ et $\times$ de $\mathbb{R}$ en posant :

$$\begin{cases} (+\infty) + (+\infty) = +\infty & (-\infty) + (-\infty) = (-\infty) & \\ \quad \forall x \in \mathbb{R}, & x + (-\infty) = -\infty & x + (+\infty) = +\infty \\ (+\infty)(+\infty) = +\infty & (-\infty)(-\infty) = +\infty & (-\infty)(+\infty) = -\infty \\ \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, & x(-\infty) = -\infty & x(+\infty) = +\infty \\ \quad \forall x \in \mathbb{R}^{-*}, & x(-\infty) = +\infty & x(+\infty) = -\infty \end{cases}$$

14

Formes indéterminées

Comme on le voit, on ne donne pas de valeur aux expressions suivantes :

$$(+\infty) + (-\infty), \quad 0(+\infty), \quad 0(-\infty)$$

Ces expressions sont appelées *formes indéterminées.*

Utiliser $\overline{\mathbb{R}}$ permet par exemple de simplifier les énoncés du genre :

$$(\lim u_n = \lambda \text{ et } \lim v_n = \mu) \Rightarrow \lim(u_n + v_n) = \lambda + \mu$$

Ce résultat est en effet vrai pour tous λ, μ de $\overline{\mathbb{R}}$ à l'exception des formes indéterminées pour lesquelles on devra faire une étude plus poussée (on devra *lever* la forme indéterminée).

I.9 Identités remarquables

Proposition *(Formule du binôme)*

$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall\, n \in \mathbb{N}, \ (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \, a^k \, b^{n-k}.$

En particulier, pour tous réels a et b : $\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases}$

Carré d'une somme de n termes : $\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right]^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2 \sum_{1 \le j < k \le n} x_j\, x_k$

Le développement fait apparaître la somme des carrés et celle des *doubles produits.*

Une factorisation classique

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, a^{n+1}-b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k = (a-b)(a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n).$$

Si l'entier n est pair : $a^{n+1}+b^{n+1} = (a+b)(a^n - a^{n-1}b + \cdots - ab^{n-1} + b^n)$

En particulier : $\begin{cases} a^2-b^2 = (a-b)(a+b) \\ a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \end{cases}$

Une somme classique

Pour tout réel $x \neq 1$, et tout entier naturel n :

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \text{et} \quad S_n(1) = n+1.$$

17

I.10 Valeur absolue et distance

Valeur absolue et distance

Définition

Pour tout réel x, on pose $|x| = \max(-x, x)$.
Cette quantité est appelée *valeur absolue* de x.

On vérifie immédiatement les propriétés suivantes :

- Pour tout réel x : $\begin{cases} |x| \geq 0, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ |x| = x \Leftrightarrow x \geq 0, \quad |x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0 \end{cases}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$: $\begin{cases} |x| = \alpha \Leftrightarrow x \in \{-\alpha, \alpha\} \\ |x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha \\ |x| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha \\ |x| \geq \alpha \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty[\\ |x| > \alpha \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\alpha[\cup]\alpha, +\infty[\end{cases}$
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| = |x|\,|y|$
- $\forall n \in \mathbb{N} : |x^n| = |x|^n$ (idem si $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$).
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y| \\ x^2 \leq y^2 \Leftrightarrow |x| \leq |y| \end{cases}$

18

Proposition *(Inégalité triangulaire)*

$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| \leq |x| + |y|$.

On a l'égalité $|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow x$ et y ont le même signe.

Généralisation

Pour tous réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\begin{cases} \left|\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\right| = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} |x_k| \qquad \text{et} \qquad \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k| \\ \text{On a l'égalité } \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right| = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k| \Leftrightarrow \text{les } x_k \text{ ont tous le même signe.} \end{cases}$$

Définition

Pour tout réel x, on note $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = \max(-x, 0)$.

Autrement dit : $x^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $x^- = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Avec ces notations, pour tout réel x : $\begin{cases} x^+ \geq 0 & x^- \geq 0 \\ x = x^+ - x^- & |x| = x^+ + x^-. \end{cases}$

Pour tous réels x et y : $\begin{cases} \max(x,y) = \dfrac{1}{2}(x + y + |x-y|) \\ \min(x,y) = \dfrac{1}{2}(x + y - |x-y|) \end{cases}$

Définition

Pour tous réels x, y, la quantité $d(x,y) = |x-y|$ est appelée *distance* de x et de y.

Elle vérifie : $\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} d(x,y) \geq 0, \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \end{cases}$

Remarque

Pour tous réels x et y, on a $d(|x|,|y|) \leq d(x,y)$, c'est-à-dire $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x-y|$.

Ce résultat complète donc l'inégalité triangulaire.

I.11 Quelques inégalités classiques

Quelques inégalités classiques

Voici trois inégalités souvent utiles :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) & (\text{égalité} \Leftrightarrow x = y) \\ \forall x \in [0,1],\ x(1-x) \leq \frac{1}{4} & (\text{égalité} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}) \\ |x| \leq k < 1 \Rightarrow 1-k \leq |1+x| \leq 1+k. \end{cases}$$

Un autre groupe de trois inégalités fréquemment utilisées :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leq |x| & (\text{égalité} \Leftrightarrow x = 0) \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exp x \geq 1+x & (\text{égalité} \Leftrightarrow x = 0) \\ \forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x & (\text{égalité} \Leftrightarrow x = 0) \end{cases}$$

Proposition *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*

Pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$, on a :

$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)$

Il y a égalité $\Leftrightarrow$ les n-uplets $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont proportionnels.

II Borne supérieure, borne inférieure

II.1 Axiome de la borne supérieure

Il reste à admettre un axiome de $\mathbb{R}$, qui fait la spécificité de $\mathbb{R}$ par rapport à $\mathbb{Q}$.

P_5 : Axiome de la borne supérieure

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

Il existe un réel α tel que : $\begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq \alpha \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ \alpha - \varepsilon < a \end{cases}$

Remarques

- Les conditions définissant le réel α signifient que :
  $\begin{cases} \alpha \text{ est un majorant de } A. \\ \text{Tout réel strictement inférieur à } \alpha \text{ n'est plus un majorant de } A. \end{cases}$
- Cela équivaut à dire que α est le plus petit des majorants de A.
  A ce titre, il est unique.
- L'ensemble des majorants de A est alors l'intervalle $[\alpha, +\infty[$.
- On exprime cette situation en disant que α est la *borne supérieure* de A. On note $\alpha = \sup(A)$.
- L'axiome P_5 peut donc être traduit en :
  Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$

L'axiome de la borne supérieure étant admis, on peut démontrer le résultat suivant :

23

Proposition *(Borne inférieure dans $\mathbb{R}$)*

Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Il existe un réel α tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in A, \alpha \leq x \ (\alpha \text{ est un minorant de } A). \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a < \alpha + \varepsilon \ (\text{tout réel} > \alpha \text{ n'est donc plus un minorant de } A). \end{cases}$$

Remarques

- Cela signifie que α est le plus grand des minorants de A. Il est donc unique.
- L'ensemble des minorants de A est l'intervalle $]-\infty, \alpha]$.
- On dit que α est la *borne inférieure* de A, et on note $\alpha = \inf(A)$.
  Ainsi : *Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.*

24

II.2 Propriétés de la borne Sup et la borne Inf

Dans ce paragraphe, A et B désignent des parties non vides de $\mathbb{R}$.

L'énoncé suivant est une conséquence immédiate des définitions :

Proposition

Si A est majorée, x est un majorant de $A \Leftrightarrow \forall a \in A, x \geq a \Leftrightarrow x \geq \sup(A)$.

Si A est minorée, x est un minorant de $A \Leftrightarrow \forall a \in A, x \leq a \Leftrightarrow x \leq \inf(A)$.

Voici les rapports entre Sup et Max, et entre Inf et Min :

Proposition

Si A est majorée, $\max(A)$ existe $\Leftrightarrow \sup(A) \in A$. Dans ce cas, $\sup(A) = \max(A)$.

Si A est minorée, $\min(A)$ existe $\Leftrightarrow \inf(A) \in A$. Dans ce cas, $\inf(A) = \min(A)$.

La proposition suivante donne le comportement de Sup et de Inf par rapport à l'inclusion.

25

Proposition

Si B est majorée et si $A \subset B$, alors A est majorée et $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Si B est minorée et si $A \subset B$, alors A est minorée et $\inf(B) \leq \inf(A)$.

On rappelle que pour toute partie A de $\mathbb{R}$, $-A = \{-a, a \in A\}$.

Proposition

Si A est majorée, alors $-A$ est minorée et : $\inf(-A) = -\sup(A)$.

Si A est minorée, alors $-A$ est majorée et : $\sup(-A) = -\inf(A)$.

Rappelons que pour toutes parties A et B de $\mathbb{R}$, on note $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$.

Proposition

Si A et B sont majorées, alors $A + B$ est majorée et : $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Si A et B sont minorées, alors $A + B$ est minorée et : $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

Enfin les résultats suivants sont évidents, pour tous réels a et b, avec $a < b$:

$$\begin{cases} \sup([a,b]) = \sup([a,b[) = \sup(]a,b]) = \sup(]a,b[) = \sup(]-\infty,b]) = \sup(]-\infty,b[) = b \\ \inf([a,b]) = \inf([a,b[) = \inf(]a,b]) = \inf(]a,b[) = \inf([a,+\infty[) = \inf(]a,+\infty[) = a \end{cases}$$

26

II.3 Congruences, partie entière

On commence par démontrer un résultat qui semble évident, mais qui est une conséquence de l'axiome de la borne supérieure.

Proposition *($\mathbb{R}$ est archimédien)*

Soit x un réel, et a un réel strictement positif.

Alors il existe un entier n tel que $na > x$.

On exprime cette propriété en disant que $\mathbb{R}$ est *archimédien*.

Conséquence

Soit x un réel, et a un réel strictement positif.

Alors il existe un couple unique (n, y) de $\mathbb{Z} \times [0, a[$ tel que $x = na + y$.

Définition *(Congruence modulo a)*

Soit a un réel strictement positif. Les réels x et y sont dits *congrus* modulo a, et on note $x \equiv y\ (a)$, s'il existe un entier relatif q tel que $x - y = qa$.

Propriétés

- La relation de congruence modulo a est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
- Chaque classe a un représentant unique dans $[0, a[$ ou encore dans $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}[$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \equiv y\ (a) \Leftrightarrow x + \lambda \equiv y + \lambda\ (a)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, x \equiv y\ (a) \Leftrightarrow \lambda x \equiv \lambda y\ (\lambda a)$

Exemples

- $\tan x = \tan y \Leftrightarrow x \equiv y\ (\pi)$
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \equiv 0\ (2\pi)$
- $\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\ (\pi/2)$

Avec $a = 1$, on est conduit à la notion de partie entière...

Définition *(Partie entière)*

Soit x un réel. Il existe un entier relatif unique m tel que $m \leq x < m+1$.
On l'appelle *partie entière* de x et on le note $\mathrm{E}(x)$, ou $[x]$.

Propriétés

Pour tous réels x et y, et tout entier relatif m :

- $[x] = m \Leftrightarrow x \in [m, m+1[$
- $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$
- $[x+m] = [x] + m$
- Si $x \notin \mathbb{Z}$, $[-x] = -[x] - 1$
- $[x+y] \in \{[x]+[y], [x]+[y]+1\}$

Définition *(Partie entière)*

Soit x un réel. Il existe un entier relatif unique m tel que $m \leq x < m+1$.
On l'appelle *partie entière* de x et on le note $\mathrm{E}(x)$, ou $[x]$.

Propriétés

Pour tous réels x et y, et tout entier relatif m :

- $[x] = m \Leftrightarrow x \in [m, m+1[$
- $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$
- $[x+m] = [x] + m$
- Si $x \notin \mathbb{Z}$, $[-x] = -[x] - 1$
- $[x+y] \in \{[x]+[y], [x]+[y]+1\}$

II.4 Valeurs approchées, densité de Q

Définition

Soit x un réel et n un entier naturel.
Il existe un unique entier relatif m tel que $m10^{-n} \leq x < (m+1)10^{-n}$.
Le réel $\alpha_n = m10^{-n}$ est appelé *valeur approchée* de x à 10^{-n} près *par défaut.*
On a $\alpha_n = 10^{-n}[10^n x]$.

Définition et propriétés

- Posons $\beta_n = (m+1)10^{-n} = \alpha_n + 10^{-n}$.
  Le réel β_n est appelé valeur approchée de x à 10^{-n} près *par excès.*
- La suite (α_n) est une suite croissante de nombres rationnels.
- La suite (β_n) est une suite décroissante de nombres rationnels.
- Les deux suites (α_n) et (β_n) convergent vers x.

Proposition *(Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)*

Soient x et y deux réels, avec $x < y$.
L'intervalle $]x, y[$ contient une infinité de nombres rationnels.
On exprime cette situation en disant que $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$.

Remarque

L'intervalle $]x, y[$ contient également une infinité de nombres irrationnels.
L'ensemble des nombres irrationnels est donc dense dans $\mathbb{R}$.

II.5 Exposants rationnels

Définition

Soit x un réel et n un élément de $\mathbb{N}^*$.
On dit qu'un réel y est une racine n-ième de x si $y^n = x$.

Proposition

Si $x \geq 0$, x admet une unique racine n-ième positive y.
On la note habituellement $y = x^{1/n}$ ou $y = \sqrt[n]{x}$ ($y = \sqrt{x}$ si $n = 2$).

Exposants rationnels

- Soit n est un entier impair, et x un réel.
  L'équation $y^n = x$ possède une solution unique dans $\mathbb{R}$, notée encore $y = x^{1/n}$.
  La fonction $x \to x^{1/n}$ est alors définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- Plus généralement, soit (p, q) dans $(\mathbb{Z}, \mathbb{N}^*)$, la fraction p/q étant non simplifiable.
  On pose $x^{p/q} = (x^{1/q})^p$. Le domaine de définition est :
  $$\begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } q \text{ est impair et } p \geq 0\,; \quad \mathbb{R}^* \text{ si } q \text{ est impair et } p < 0. \\ \mathbb{R}^+ \text{ si } q \text{ est pair et } p \geq 0\,; \quad \mathbb{R}^{+*} \text{ si } q \text{ est pair et } p < 0. \end{cases}$$

Propriétés

Si q est impair, l'application $x \longrightarrow x^{p/q}$ a la parité de p.

Sur leur domaine définition, les relations sur les exposants sont toujours valables.

Ainsi, pour tous rationnels r, s : $\begin{cases} (xy)^r = x^r\, y^r & x^r\, x^s = x^{r+s} \quad (x^r)^s = x^{rs} \\ \dfrac{1}{x^r} = x^{-r} & \dfrac{x^r}{x^s} = x^{r-s} \end{cases}$

33