

**University Djilali Bounaama-Khamis Meliana,
Ain Defla-Algeria.**



Elasticité Cours & Exercices

6^{ème} Semestre

Licence

LMD

Constructions

Mécaniques

**ZAHAF Samir
2021**

Contenu de la matière
CHAPITRES
CHAPITRE 1 : Introduction, Rappel mathématique (2 semaines)
Calcul vectoriel, calcul tensoriel.
CHAPITRE 2 : Tenseur des contraintes (4 semaines)
Coupure, facette et vecteur contrainte, Formule de Cauchy, tenseur des contraintes, Equations d'équilibre, Contraintes principales et directions principales, Invariants scalaires du tenseur des contraintes, Tenseur sphérique et déviateur.
CHAPITRE 3 : Tenseurs des déformations (4 semaines)
Vecteur de déplacement, Tenseur des déformations, Transformation des longueurs et des angles, Déformations principales, Invariants scalaires du tenseur des déformations, Tenseur sphérique et déviateur.
CHAPITRE 4 : Lois de Hooke (Relations contraintes – déformations) (4 semaines)
Formulation en contraintes, Formulation en déformations, Formulation Thermo-élastique.
CHAPITRE 5 : Critères de résistance (1 semaine)
Critère de la contrainte normale maximale (critère de Rankine), Critère du Cisaillement maximale (critère de Tresca), Critère de Von Mises.
Mode d'évaluation : Contrôle continu : 40% ; Examen : 60 %.

INTRODUCTION

Ce polycopié est destiné aux étudiants de 6^{ème} semestre Licence LMD spécialité Constructions Mécaniques Filière Génie Mécanique.

Il a été élaboré conformément au programme du canevas de cette licence. Pour rendre la matière acquérable. Les chapitres ont été conçus en présentant les définitions, les méthodes et les supports d'une façon aisée et claire, les exemples pour éclaircir la situation n'en manquent pas.

Enfin j'adresse mon invitation à tout lecteur ayant des critiques ou des remarques à me contacter par cet email : samir.zahaf@univ-dbkm.dz

ZAHAF S.

Elasticité

1. Analyse des contraintes:

- Milieu continu
- la théorie de l'élasticité étudie les déplacements, les déformations et les contraintes dans un solide soumis à des forces extérieures.
- nous adopterons les hypothèses suivantes:
 - le matériau est **homogène** (il a les mêmes propriétés en tout point) et **isotrope** (en un point donné, il a les mêmes propriétés dans toutes les directions).
 - le comportement du matériau est **linéaire** (les relations entre les contraintes et les déformations sont linéaires) et **élastique** (le solide reprend sa forme initiale dès que les forces appliquées sont supprimées).

Le repère (O, x, y, z) est un repère orthonormé. $\vec{i}$, $\vec{j}$, et $\vec{k}$ sont les vecteurs unitaires des axes.

* **Définition des Contraintes**: on considère un corps en équilibre $\rightarrow$ soumis à un système de force.

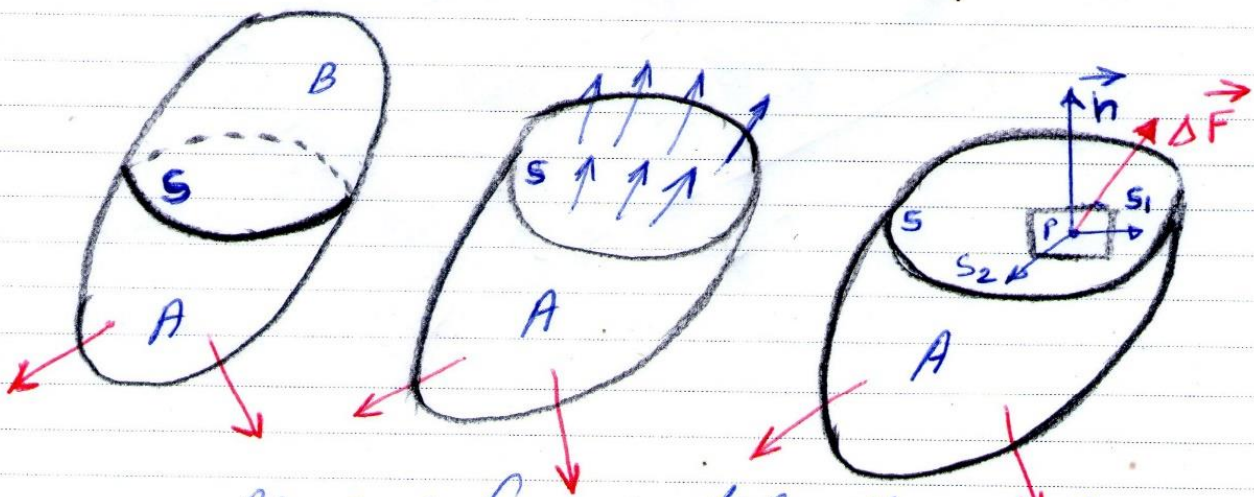


figure 1. Coupure et facette n en P

ΔA : un élément infinitésimal de la surface S

s_1 et s_2 système d'axe

$\vec{n}$: vecteur normal au plan

$\Delta \vec{F}$: la force qui s'exerce sur cette facette.

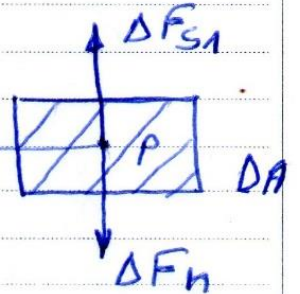
en générale $\underline{\Delta F}$ ne se trouve pas le long de n, s_1, s_2
 la décomposition de ΔF suivant les 3 axes s_1 et s_2
 et n . σ_n : contrainte normale sur n .

τ_{s_1}, τ_{s_2} : contrainte tangentielle.

2- définition σ_n : $\sigma_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A}$

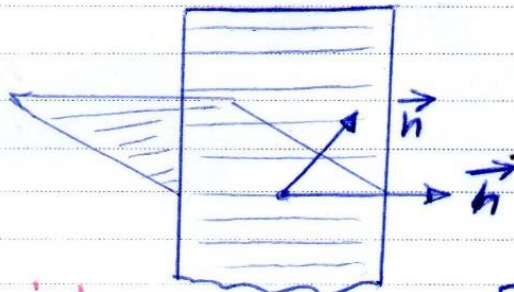
$\tau_{s_1} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{s_1}}{\Delta A}$, $\tau_{s_2} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{s_2}}{\Delta A}$

(2-1)



- Quand ΔF varie: les expressions ΔF_n
 varie à un point à l'autre.

- pour spécifier les contraintes en un point $\underline{P}$
 Connaissances les Contraintes dans tous les plan passant
 par $\underline{P}$.



3- Tenseur des Contraintes:

$[\underline{\Sigma}]$

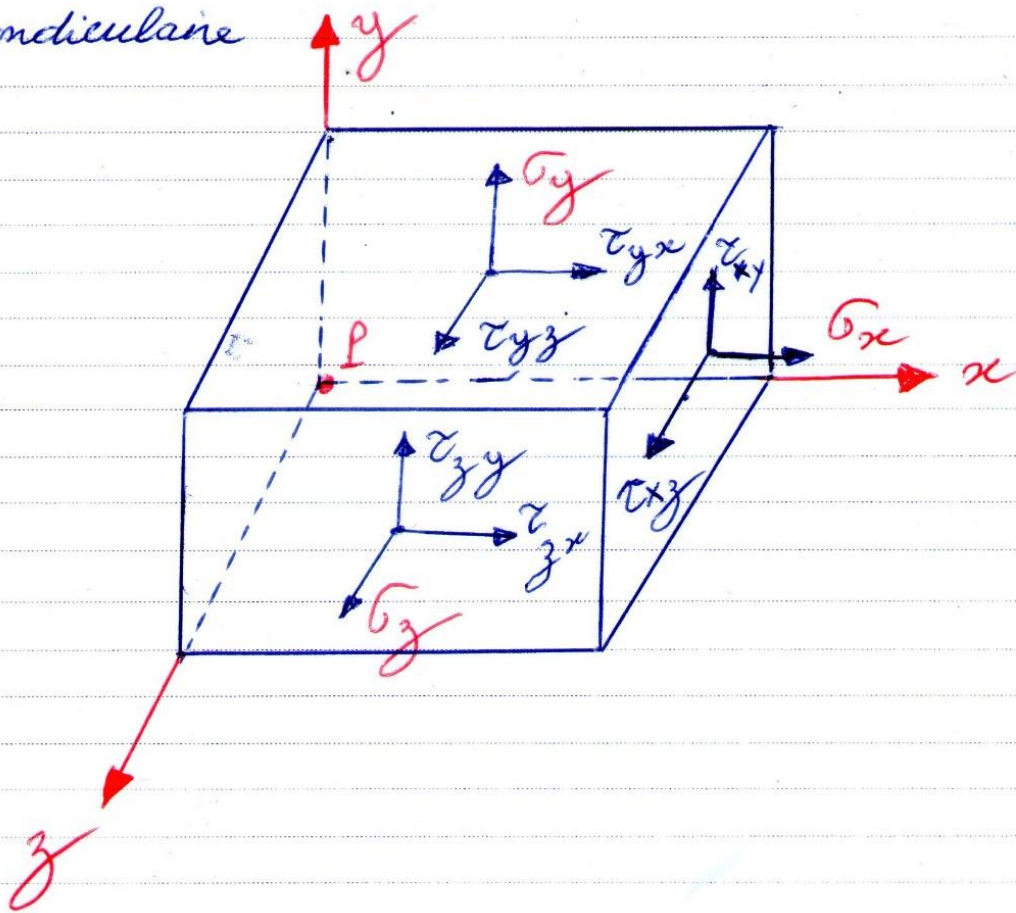
$$[\underline{\Sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zn} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

(2-2)

* chaque ligne représente les contraintes qui agissent sur
 le point $\underline{P}$, le tenseur des Contraintes et un tenseur
 du second ordre.

* pour représenter la détermination des contraintes sur
 un nombre infini de plan passant par le point $\underline{P} \Rightarrow$
 besoin de préciser la contrainte sur trois plans mutuell- 2-
 composante des ement

perpendiculaire



* Les plans $\perp$ aux des coordonnées il faut spécifier
 1. L'état des Contraintes en point "P" et définie par
3 Composantes principales.

$$\sigma_{ij}, i, j = x, y, z$$

$$i = x$$

$$j = x, y, z$$

$$i = y$$

$$j = x, y, z$$

$$i = z$$

$$j = x, y, z$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$$

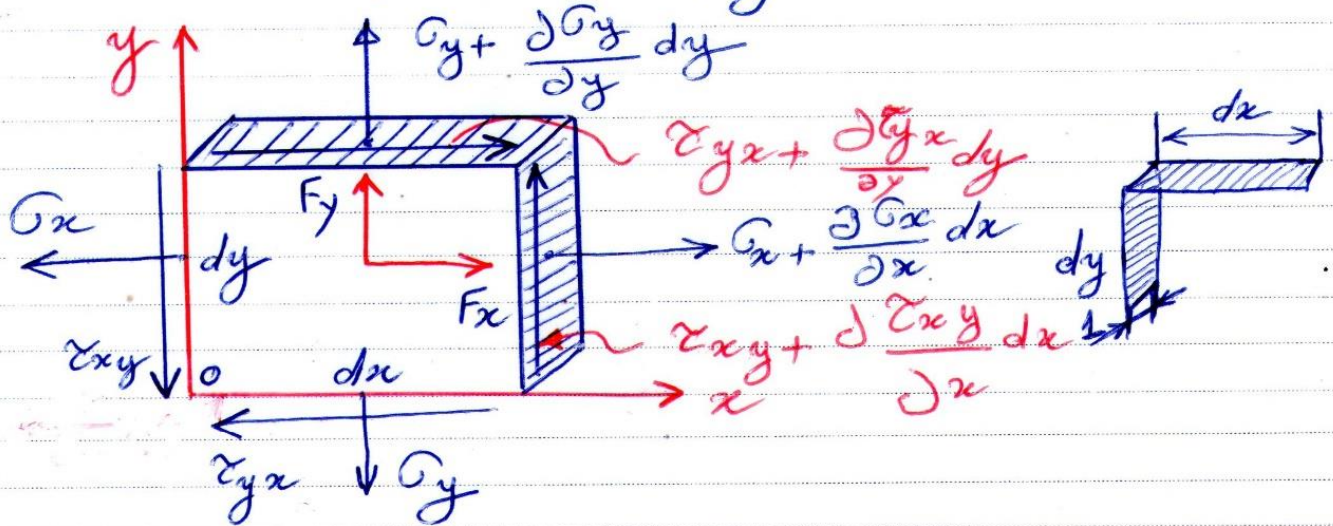
$$\Leftrightarrow \sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}$$

4 - Variation des Contraintes dans Corps:

généralement $\rightarrow$ variation des contraintes (dans) d'un point à un autre,

4 - Variation des Contraintes dans un corps: on considère un élément mince des cotes dx, dy .



$F_x, F_y \rightarrow$ force de volume

* la variation des Contraintes avec la position (expression de Taylor)

$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \rightarrow$ la loi de Taylor.

* on considère l'équilibre de l'élément mince (épaisseur = 1)
 $\sum \text{Moment}/_0 = 0 \quad M = F \cdot l \Rightarrow F = G \cdot S \Rightarrow M = G \cdot S \cdot l$

$$\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \cdot dx \cdot 1 \right) \frac{dx}{2} + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \cdot dy \right) \frac{dy}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \cdot dx - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dy \cdot dx + \sigma_y \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{dx}{2} - F_x \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{dy}{2} = 0$$

* on néglige le produit triples : dx et dy

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (2-3).$$

de la même manière, $\tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$

Conclusion: Le tenseur de contrainte est symétrique.

$$[\Sigma] = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

* L'équilibre des forces sur l'axe x:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy \cdot 1 - \sigma_x dy \cdot 1 + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \cdot 1 + \tau_{yx} \cdot dx \cdot 1 + F_x \cdot dx \cdot dy \cdot 1 = 0$$

* Après simplification: $\boxed{\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x \right) dx \cdot dy = 0}$

- L'équilibre des forces suivant y:

$$\boxed{\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y \right) dx \cdot dy = 0}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-4) \quad (2D)$$

5. Equation différentielles L'équilibre:

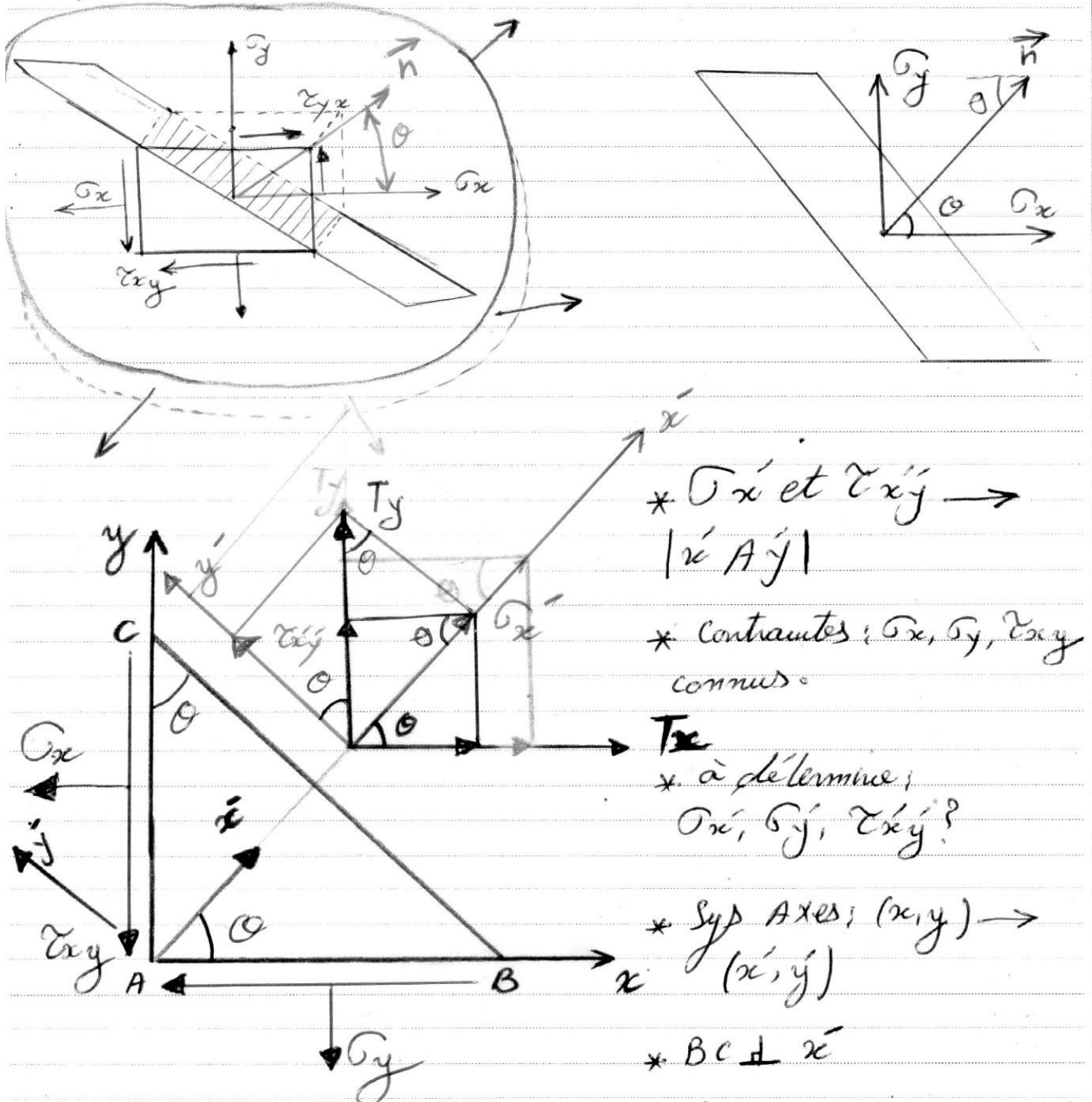
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0 \end{aligned} \right. \quad \begin{matrix} (3D) \\ (2-5) \end{matrix}$$

6 - Contraintes bidimensionnelles en un point :

Lorsque les contraintes et les forces de volume sont indépendants donc il y a 2 classes :

* Contraintes planes et déformations planes.

- Déterminer l'équation de transformation des composantes des contraintes.



on suppose : $BC = 1, AB \rightarrow \sin \theta, AC \rightarrow \cos \theta$

- L'équilibre des forces suivant x et y :

$$\sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta = T_x \quad (2-6)$$

$$\tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta = T_y$$

T_x et $T_y \rightarrow$ composantes des vecteurs contraintes

- les contraintes normales et tangentielles sur BC;

* projeter T_x, T_y sur x' et y' .

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = T_x \cos \theta + T_y \sin \theta \\ \tau_{x'y'} = T_y \cos \theta + T_x \sin \theta \end{cases} \quad (a)$$

- en substituant (2-6) dans (a)

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\tau_{x'y'} = \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \sigma_x \sin \theta \cos \theta$$

- en utilisant les identités trigonométriques:

$$\begin{cases} \cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) \quad (3) \end{cases}$$

7. les équations de transformations de contraintes:

$$\sigma_{x'} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

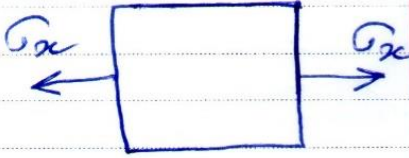
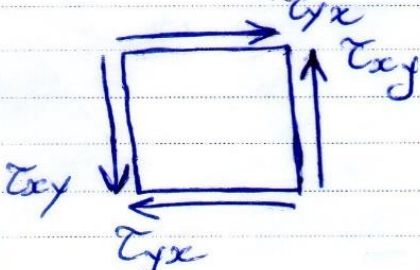
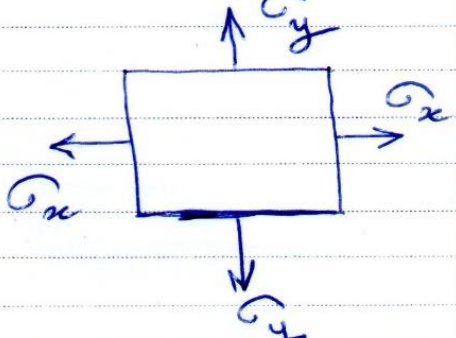
$$\sigma_{y'} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (2-7)$$

(2-7) $\rightarrow$ permettent de calculer des contraintes dans tout le plan BC.

- L'état des contraintes en 1 point $\rightarrow \sigma_{y'}$ $\rightarrow$ remplacée σ par $\sigma + 90$

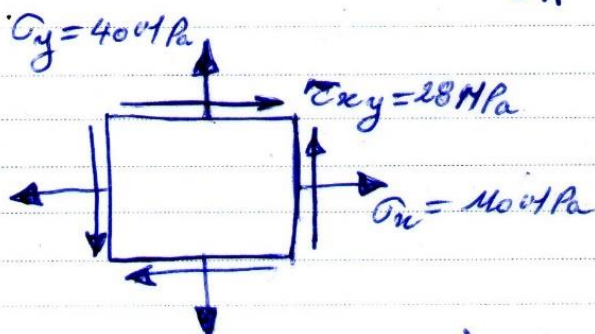
* Cas particuliers :

contrainte uniaxiale	cisaillement pure	contrainte biaxiale
 $\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta$ $\tau_{x'y'} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta$	 $\sigma_{x'} = 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$ $\tau_{x'y'} = \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$	 $\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta$ $\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta$

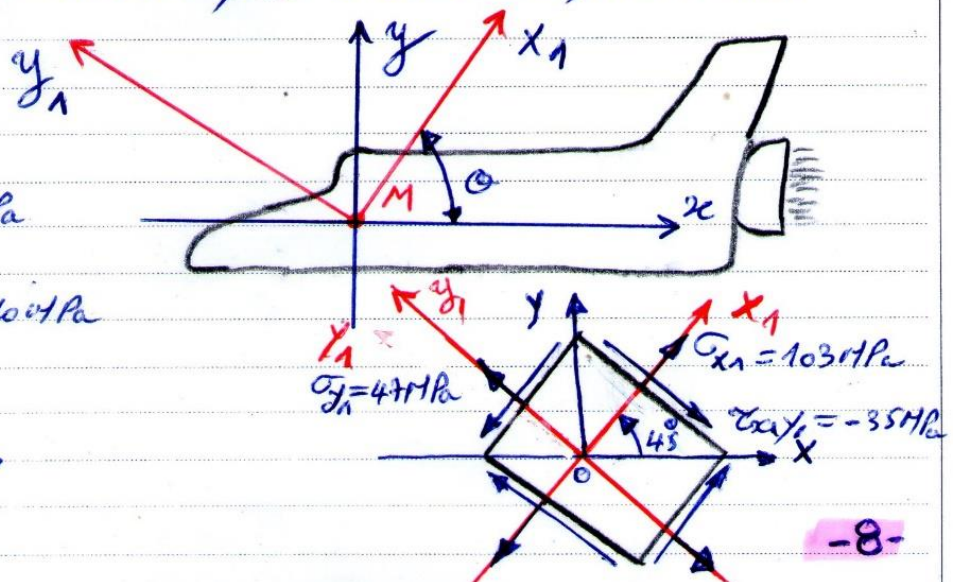
Exemple : les contraintes en un point M de la structure de la navette spatiale sont (après mesures expérimentales :

$$\sigma_x = 110 \text{ MPa}, \sigma_y = 40 \text{ MPa}, \tau_{xy} = 28 \text{ MPa}.$$

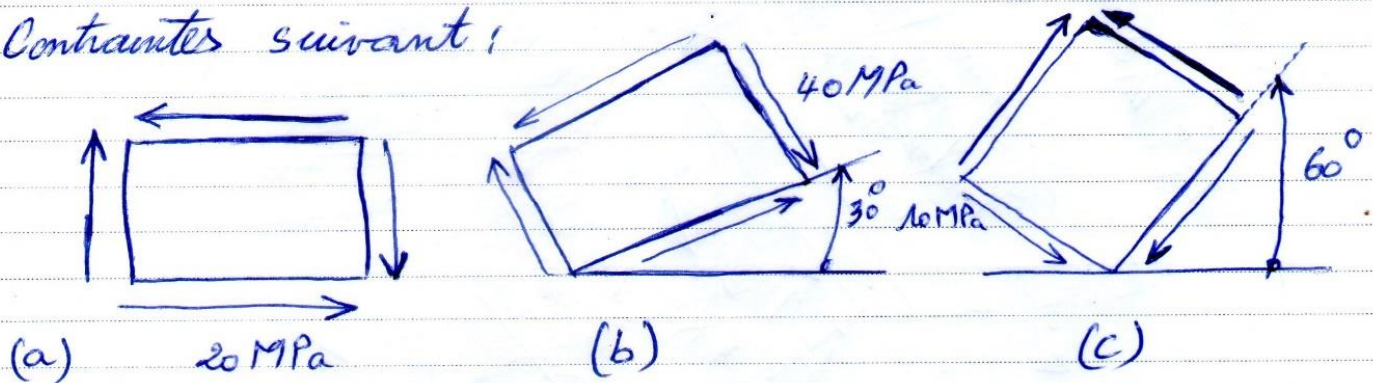
1. Déterminons la valeur des contraintes dans une direction à 45° .



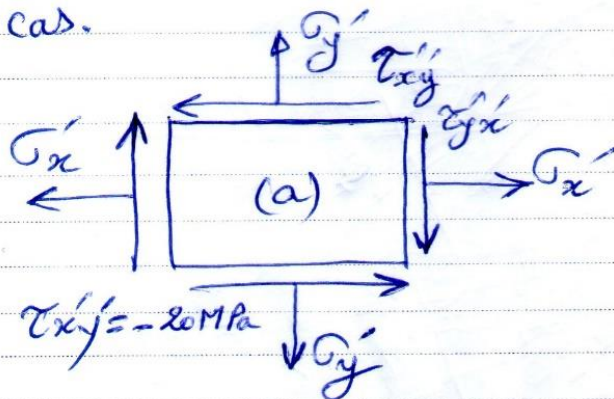
$\Rightarrow$



Exercice 01: un élément d'une structure est soumis à un ensemble de forces et moment. chacune des sollicitations produit séparément dans un point des conditions de contraintes suivant:



* Déterminons la valeur des contraintes dans chaque cas.

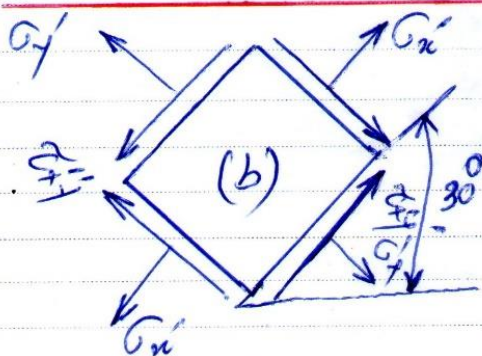


$$\sigma_x' = \sigma_y' = 0 \text{ car:}$$

$$\sigma_x' = \frac{1}{2} (0 + 0) + \frac{1}{2} (0 - 0) \cos 2(0) + 20 \sin 2(0) = 0$$

$$\sigma_y' = \frac{1}{2} (0 + 0) - \frac{1}{2} (0 - 0) \cos 2(0) + 20 \sin 2(0) = 0$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{1}{2} (0 - 0) \sin 2(0) - 20 \cos 2(0) = -20 \text{ MPa}$$



$$\sigma_x' = \frac{1}{2} (0 + 0) + \frac{1}{2} (0 - 0) \cos 2(-30) - 40 \sin 2(-30) = 20\sqrt{3} \text{ MPa}$$

$$\sigma_y' = \frac{1}{2} (0 + 0) - \frac{1}{2} (0 - 0) \cos 2(-30) + 40 \sin 2(-30) = -20\sqrt{3} \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{1}{2} (0 - 0) \sin 2(-30) - 40 \cos 2(-30) = -20 \text{ MPa}$$