1.2 Algèbres et tribus

Les tribus vont constituer les ensembles que l'on va pouvoir mesurer. L'objectif de cette section est de définir les tribus et de donner quelques moyens de construire des tribus.

1.2.1 Tribus, définition et propriétés élémentaires

Définition 1.2.1 *On appelle Algébre de parties d'un ensemble* Ω *toute famille* Λ *de parties de* Ω *vérifiant les axiomes suivantes*

1. $\emptyset \in \Lambda$.
2. $A \in \Lambda \Longrightarrow A^c \in \Lambda$.
3. Si A, $B \in \Lambda \Longrightarrow A \cup B \in \Lambda$.

Définition 1.2.2 *Soit* Ω *un ensemble quelconque. Une famille* $\mathcal{F}$ *de parties de* Ω *est appelée une **tribu** sur* Ω *(ou une* σ***-algèbre** *sur* Ω*) si elle vérifie les trois axiomes suivantes :*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$.(stabilité par passage au complémentaire).
3. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \sqsubseteq \mathcal{F} \Longrightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.(stabilité pour l'union dénombrable).

Le couple $(\Omega, \mathcal{F}\ )$ s'appelle un espace mesurable et les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés ensembles mesurables de Ω.

Remarque 1.2.1 *1. Une tribu est une algèbre d'ensembles stable par réunion dénombrable.*

Proposition 1.2.1 *Si l'algèbre* Λ *vérifiée la propriété*

$$(B_n)_{n\geq 1} \subset \Lambda,\ \ (B_n)_{n\geq 1}\ \ \textit{est croissante}\ \Longrightarrow \cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \Lambda.$$

Alors Λ est une tribu sur Ω.

Preuve. Soit $(A_n)_{n\geq 1} \subset \Lambda$ une suite de parties de Ω. Si on pose $B_n = \cup_{k=1}^{n} A_k \in \Lambda$, la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est croissante donc $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \Lambda$. D'autre part il est clair que $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, d'ou $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Lambda$. ■

Exemple 1.2.1 *Soit Ω un ensemble non vide.*

1. La famille $P(\Omega)$ de toute les parties de Ω est la plus grande tribu sur Ω, et est appelée la tribu **triviale**.

2. La famille $\mathcal{F} = \{\Omega\ ,\ \emptyset\}$ est la plus petite tribu sur Ω, et est appelée la tribu **grossière.**

3. Si on fixe A un sous-ensemble de Ω alors $\mathcal{F} = \{\Omega\ ,\ \emptyset, A, A^c\}$ est une tribu. Il s'agit de la plus petite tribu contenant l'ensemble Ω .

4. La famille $\mathcal{F}$ définie par $\mathcal{F} = \{A \sqsubseteq \mathbb{R},\ A$ dénombrabe ou A^c dénombrable$\}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.

5. Si Ω est un ensemble infini. La famille A définie par

$$A = \{B \subset \Omega,\ B \text{ ou } B^c \text{ fini}\}$$

n'est pas une tribu sur Ω .

Proposition 1.2.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable, on a :*

1- $\Omega \in \mathcal{F}$

2- Si $\mathcal{F}$ est une tribu et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ alors $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

3- Si $T, S \in \mathcal{F}$ alors $T \backslash S \in \mathcal{F}$.

4- Si $T, S \in \mathcal{F}$ alors $T \triangle S \in \mathcal{F}$.

Preuve. 1- On sait que $\emptyset \in \mathcal{F}$, de plus $\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire, donc $\Omega = \emptyset^c \in \mathcal{F}$.

2- On note pour tout n, $B_n = A_n^c$. En vertu de la stabilité par passage au complémentaire, $B_n \in \mathcal{F}$, et par stabilité par réunion dénombrable, $\cup_{n\geq 0} B_n \in \mathcal{F}$,en appliquant à nouveau la stabilité par passage au complémentaire, $(\cup_{n\geq 0} B_n)^c \in \mathcal{F}$. Enfin en utilisant les lois de Morgan,

$$\begin{aligned} (\cup_{n\geq 0} B_n)^c &= \cap_{n\geq 0} B_n^c\ , \\ &= \cap_{n\geq 0} A_n, \\ &\in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

3- $T \backslash S \in \mathcal{F}$ car $T \backslash S = T \cap S^c \in \mathcal{F}$.

4- $T \triangle S \in \mathcal{F}$ car $T \triangle S = (T \backslash S) \cup (S \backslash T) \in \mathcal{F}$. ∎

Proposition 1.2.3 *L'intersection d'une famille quelconque de tribus sur Ω est une tribu sur Ω*

Preuve. Soit F une tibu .

On pose $\mathcal{F} = \cap_{i \in I} F_i$.

Il suffit de vérifier les 3 axiomes des tribus.

1. $\emptyset \in F$, donc $\emptyset \in \cap_{i \in I} F_i = \mathcal{F}$.

2. Soit $A \in \mathcal{F}$. On doit montrer que $A^c \in \mathcal{F}$. Comme les $A \in F_i$ et que F_i est une tribu, $A^c \in F_i$. Comme ceci est vrai pour tout $i \in I$, on a $A^c \in \cap_{i \in I} F_i = \mathcal{F}$.

3. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'éléments de F_i . On doit montrer que $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme les A_n sont dans F_i et que F_i est une tribu, $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in F_i$. Comme ceci est vrai pour tout $i \in I$, on a $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \cap_{i \in I} F_i = \mathcal{F}$. ■

Cette proposition permet de définir la notion essentielle de tribu engendrée.

Définition 1.2.3 *Soit S une famille de parties de Ω . On note $\sigma(S)$ l'intersection de toutes les tribus $\mathcal{F}$ contenant S . Alors, $\sigma(S)$ est une tribu sur Ω appelée tribu engendrée par S . C'est la plus petite tribu sur Ω qui contient S .*

Remarque 1.2.2 *En pratique, pour montrer qu'une tribu $\mathcal{F}$ est la tribu engendrée par S il suffit de montrer que toute tribu contenant S contient $\mathcal{F}$.*

Proposition 1.2.4 *Soit Ω un ensemble non-vide. Si S une famille de sous-ensembles de Ω alors $S = \sigma(S)$ si et seulement si S est une tribu. Si $S \subseteq \mathcal{F}$ alors $\sigma(S) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$.*

Preuve. Si $S = \sigma(S)$, alors S est une tribu (car $\sigma(S)$ l'est automatiquement). Réciproquement si S est une tribu alors c'est clairement la plus petite tribu contenant S, i.e. $\sigma(S)$ par définition.

Si $S \subseteq \mathcal{F}$ alors, par définition $\sigma(\mathcal{F})$ est la plus petit tribu contenant $\mathcal{F}$ ce c'est donc en particulier une tribu contenant S. Puisque $\sigma(S)$ est la petite de ces tribus, $\sigma(S)$ est contenue dans $\sigma(\mathcal{F})$. ■

1.2.2 Tribus boréliennes

En topologie, vous avez vu la notion d'ouvert d'un espace métrique. Rappelons quelques définitions et propriétés de topologie.

Définition 1.2.4 *Soit (Ω, d) un espace métrique. Soit $x \in \Omega$ et $r \geq 0$. La* ***boule ouverte*** *de centre x et de rayon r est l'ensemble suivant*

$$B(x, r) := \{y \in \Omega / d(y, r) < r\}.$$

Soit U un sous-ensemble de Ω. On dit que U est un ***ouvert*** *de Ω si pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq U$.*

On notera $O(\Omega)$ l'ensemble des ouverts de l'espace métrique (Ω, d).

Exemple 1.2.2 *Soit (Ω, d) un espace métrique. Alors $\emptyset, \Omega$ et toutes les boules ouvertes de (Ω, d) sont des ouverts.*

Exemple 1.2.3 *Dans $\mathbb{R}$ (muni de la distance définie avec la valeur absolue), les intervalles ouverts $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ sont des ouverts topologiques.*

Définition 1.2.5 *Soit (Ω, d) un espace métrique. La tribu borélienne sur (Ω, d) est la tribu $\sigma(O(\Omega))$ engendrée par les ouverts de (Ω, d), notée $B(\Omega)$. Les élements de la tribu borélienne $B(\Omega)$ s'appelent les (ensembles) boréliens de Ω.*

Proposition 1.2.5 *La tribu borélienne $B(\Omega)$ est aussi engendrée par les fermés de l'espace topologique Ω.*

Preuve. Soit F la famille de tous les fermés de Ω. Comme les tribus sont stables par passage au complémentaire et que les fermés sont les complémentaires des ouverts on a $F \subset B(\Omega)$ et alors $\sigma(F) \subset B(\Omega)$. Inversement, soit $\theta \in O$ un ouvert de Ω, alors $\theta^c \in F \in \sigma(F)$ donc $\theta \in \sigma(F)$. Ce qui montre que $O \subset \sigma(F)$ et puisque on a $B(\Omega) = \sigma(O)$ on a $B(\Omega) \subset \sigma(F)$. ■

Boréliens réels

Les boréliens jouent un role essentiel dans l'intégration (réelle). Ici, on considère $\Omega = \Omega$ $=]-\infty, +\infty[$ muni de sa topologie usuelle (topologie de l'ordre qui coïncide avec la topologie engendrée par la distance usuelle $|.|$). On considère alors sur $\mathbb{R}$ la tribu borélienne $B(\Omega)$ engendrée par les ouverts de sa topologie usuelle. On rappelle que les ouverts de $\mathbb{R}$ sont des réunions dénombrables d'intervalles ouverts $\cup_{n\geq 1}]a_n, b_n[$ (réunion finie ou dénombrable).

Typiquement, les boréliens de $\mathbb{R}$ sont

- tout ouvert, tout fermé.
- tout intervalle ouvert, fermé, semi-fermé, fini, infini .
- tout singleton $\{x\}, x \in \mathbb{R}$.
- tout ensemble dénombrable $\{x_i,\ i \in I\}$, $I \subset \mathbb{N}$, $x_i \in \mathbb{R}$.

En effet, $]a, b[\ \in B(\mathbb{R})$ car est un ouvert, $[a, b] = \cap_{n\geq 1}]a - 1/n, b + 1/n[$, $[a, b[\ = \cap_{n\geq 1}]a - 1/n, b[$, $]a, b] = \cap_{n\geq 1}]a, b + 1/n[$ sont dans $B(\mathbb{R})$.

Puis $]-\infty, b] = \left(\cup_{\substack{n\leq |b| \\ n\in\mathbb{Z}}}]n-1, n]\right) \cup]n, b]$, $]-\infty, b[\ = \cup_{n\geq 1}]-\infty, b - 1/n]$, $[a, +\infty] =]-\infty, a[^c$, $]a, +\infty[\ =]-\infty, a]^c$ sont aussi dans $B(\mathbb{R})$.

Enfin $\{x\} = \cap_{n\in\mathbb{N}}]x - 1, x] \in B(\mathbb{R})$.

Un ensemble dénombrable est une union disjointe de singletons donc est dans $B(\mathbb{R})$.

Proposition 1.2.6 *La tribu $B(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles $]a, +\infty[$ pour $a \in \mathbb{R}$.*

Preuve. Soient $S = \{]a, +\infty[, a \in \mathbb{R}\}$ la famille de toute les intervalles $]a, +\infty[$ et O l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$. Il est clair que $S \subset O$ alors $\sigma(S) \subset B(\mathbb{R})$ car par définition on a $\sigma(O) = B(\mathbb{R})$. Maintenant, montrons que $O \subset \sigma(S)$, soit $\theta \in O$ alors, d'aprés le lemme précèdent, θ est une réunion dénombrable d'intervalles de la forme $]a, b[$ c-à-d $\theta = \cup_{n=1}^{+\infty}]a_n, b_n[$: Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ on a

$$]a, b[\ =]-\infty, b[\ \cap\ ]a, +\infty[\qquad \text{et} \qquad [b, +\infty[\ = \cap_{n=1}^{+\infty} \left]b - \frac{1}{n}, +\infty\right[$$

Pour tout $n \geq 1$, on a $\left]b - \frac{1}{n}, +\infty\right[\in S \subset \sigma(S)$ donc la stabilité par intérction garantit que $[b, +\infty[\ \in \sigma(S)$ et par complémentaire,

$$]-\infty, b[\ = ([b, +\infty[)^c \in \sigma(S)$$

et $]a,+\infty[\ \in S \subset \sigma(S)$ ce qui donne $]a,b[\ \in \sigma(S)$. Alors $\theta = \cup_{n=1}^{+\infty}]a_n,b_n[\ \in \sigma(S)$. Finalement on obtient l'inclusion $O \subset \sigma(S)$ ce qui implique que $B(\mathbb{R}) \subset \sigma(S)$. ■

De la même façon, on a les égalités suivantes :

$$B(\mathbb{R}) = \sigma(\{[a,+\infty[\ /a \in \mathbb{R}\})$$
$$B(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty,a[\ /a \in \mathbb{R}\})$$
$$B(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty,a]\ /a \in \mathbb{R}\})$$

Proposition 1.2.7 *Les boréliens de* $\mathbb{R}$ *sont engendrés par*

- les ouverts.
- les fermés.
- les intervalles ouverts$]a,b[$.
- les intervalles fermés $[a,b]$.
- les intervalles semi-ouverts $[a,b[,]a,b]$.
- les demi-droites fermées $]-\infty,a]$ ou $[b,+\infty[$.