

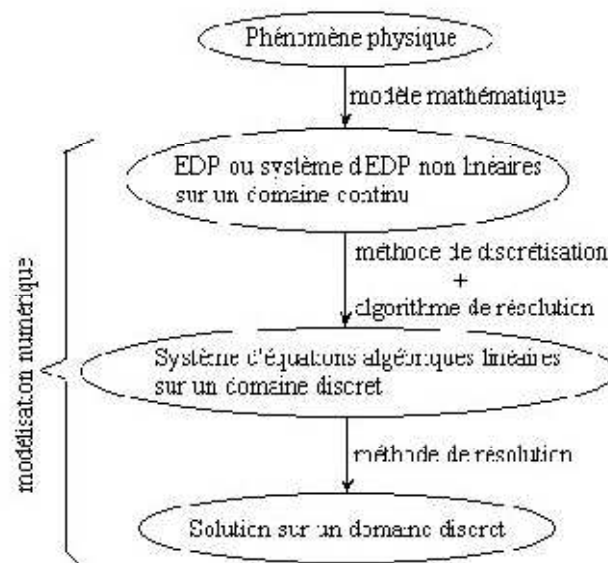
# Chapitre I :

## Rappels sur les méthodes des différences finies et volumes finis

### 1.1- Introduction

Le modèle mathématique constitué par une équation différentielle aux dérivées partielles (EDP) ou par un système d'EDP est transformé, à l'aide d'une méthode de discrétisation dans un système d'équations algébriques.

Le principe du calcul numérique est illustré à la figure 1.2.



Les méthodes de discrétisation les plus connues sont :

- méthodes des différences finies (MDF) ;
- méthodes des éléments finis (MEF) ;
- méthodes spectrales (MS) ;
- méthodes des volumes finis (MVF).

L'algorithme de résolution numérique implique la méthode d'intégration temporelle et de découplage, comme par exemple, les algorithmes SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC et PISO,

### 1.2- Discrétisation des équations

La discrétisation c'est le passage d'une information continue vers une information discrète. Les équations discrétisées sont la transformation des équations aux dérivées partielles en équations algébriques. La discrétisation du domaine d'étude précède la discrétisation des équations.

L'approche consiste à diviser le domaine de calcul en plusieurs petits volumes qui ne se chevauchent pas et dont la somme fait exactement le volume du domaine de calcul à étudier. C'est très important pour assurer le principe de conservation. Ensuite vient le principe de base de la méthode qui n'est autre que le théorème de la divergence (Ostrogradski) qui consiste à changer une intégrale de volume en intégrale de surface. L'application de ce théorème tout en utilisant des schémas de différences finies pour les dérivées partielles, donne naissance à des équations algébriques.

### 1.2.1- forme des équations différentielles

Considérons la forme générale d'une Equation aux Dérivées Partielles (EDP) de second ordre suivant les deux variables indépendantes (x et y) :

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F \phi + G = 0 \quad (1)$$

Une classification assez simple de cette équation peut être faite sur la base des coefficients associés aux dérivées d'ordre le plus élevé A, B et C. On calcule le déterminant défini par :

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

L'équation est dite de type

- **elliptique** si  $\Delta < 0$ ,
- **parabolique** si  $\Delta = 0$ ,
- **hyperbolique** si  $\Delta > 0$ .

Par exemple :

|                         |   |              |
|-------------------------|---|--------------|
| L'équation de Laplace   | $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ | elliptique   |
| L'équation de diffusion | $\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$     | parabolique  |
| L'équation              | $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ | hyperbolique |

### 1.2.2- Processus de discrétisation

À l'étape 1 du processus de discrétisation en volume fini, les équations gouvernantes sont intégrés sur les éléments (ou volumes finis), le théorème de Gauss est appliqué pour transformer les intégrales de volume de les termes de convection et de diffusion en intégrales de surface.

Après cette étape, les intégrales de surface et de volume sont transformées en intégrales discrètes et intégrées numériquement grâce à l'utilisation de points d'intégration.

L'équation de conservation pour une variable scalaire générale peut être exprimée comme

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S$$

La forme stationnaire de l'équation ci-dessus est obtenue en négligeant le terme transitoire

$$\nabla \cdot (\rho u \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S$$

En intégrant l'équation ci-dessus sur l'élément C représenté sur la figure

$$\int_{V_c} \nabla \cdot (\rho u \phi) dv = \int_{V_c} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dv + \int_{V_c} S dv$$

On remplace les intégrales de volume des termes de la convection et de la diffusion par les intégrales de surface par l'utilisation du théorème de divergence, l'équation ci-dessus devient :

$$\oint_{\partial V_c} (\rho u \phi) ds = \oint_{\partial V_c} (\Gamma \nabla \phi) ds + \int_{V_c} S dv$$

Pour la résolution des équations on besoin des conditions limites. Ces conditions limites peuvent être de trois natures :

Dirichlet : Dans ce type de conditions la valeur de la variable dépendante est imposée sur la frontière du domaine de calcul

$$\Phi = f$$

Newman : La variable dépendante n'est pas connue sur la frontière mais sa dérivée est bien Définie

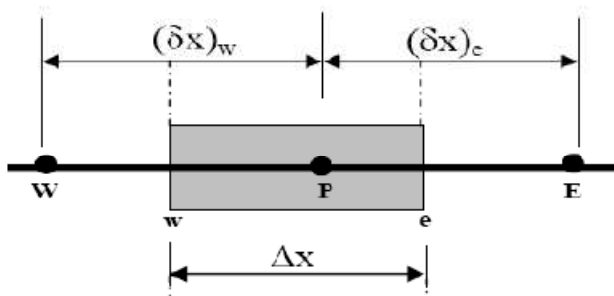
$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = f$$

Mixte : Une combinaison linéaire des deux premières conditions est imposée sur la frontière

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + k\phi = f$$

### 1.2.3- Formulation par les volumes de contrôle

L'équation est discrétisée pour un volume de contrôle interne. Ce volume de contrôle est construit autour du point P (Figure 1). Nous appelons 'East' le premier voisin du point P dans la direction des x croissants et 'West' le premier voisin dans la direction des x décroissante, les deux traits verticaux en pointille délimitent le volume de contrôle associé à P. Les frontières du volume de contrôle sont représentées par les lettres minuscules e et w.



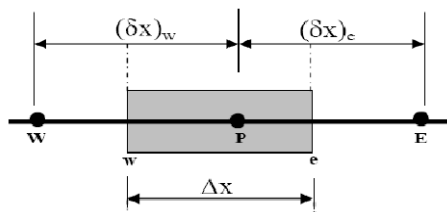
### 1.3. Exemple - Problème de conduction unidimensionnel

Nous appliquons maintenant la méthode des volumes finis dans le cas de l'équation de diffusion de la chaleur pour une géométrie monodirectionnelle cartésienne, en régime permanent. Dans le cadre de ces hypothèses, l'équation de la chaleur prend la forme suivante :

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + S = 0 \quad (7)$$

$k$  est la conductivité thermique,  $T$  la température et  $S$  terme source représentant la création ou l'absorption d'énergie par unité de volume.

Pour un volume de contrôle interne, l'équation est discrétisée



Le point P a deux voisins W et E

L'intégrale de l'équation dans le volume de contrôle entre w et e :

$$\int_w^e \left[ \frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + S \right] dx = 0$$

$$\left( k \frac{dT}{dx} \right)_e - \left( k \frac{dT}{dx} \right)_w + \int_w^e S dx = 0 \quad (8)$$

On suppose que le coefficient de conductivité k est constant  $k_e = k_w = k$

$$\left( k \frac{T_E - T_P}{\delta x_e} \right)_e - \left( k \frac{T_P - T_W}{\delta x_w} \right)_w + \bar{S} \Delta x = 0 \quad (10)$$

Après arrangement :

$$a_p T_p = a_E T_E + a_W T_W + b \quad (11)$$

$$a_p = a_E + a_W$$

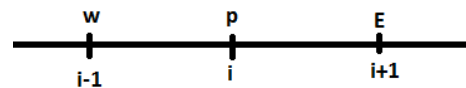
$$a_E = \frac{k}{\delta x_e}$$

$$a_W = \frac{k}{\delta x_w}$$

$$b = \bar{S} \Delta x$$

L'équation (11) est l'équation discrétisée de l'équation différentielle (7) C'est de la forme :

$$a_p T_p = \sum a_{nb} T_{nb} + b \quad (12)$$



On peut généraliser ce résultat pour plusieurs nœuds (i)

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i$$

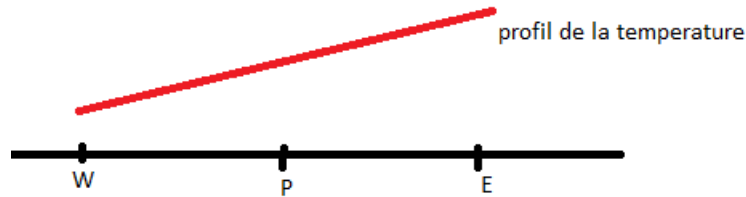
Le nombre d'équations est égal aux nombres de nœuds (i).

Arrangement du terme source

Il y a quatre règles de base qu'il faut respecter pour les équations :

**Règle 01 :**

La consistance aux interfaces des volumes de contrôle : Le flux à travers les sous domaines doit être conservé que le profil de la variation de la température est supposé linéaire



**Regle 02 :** tout les coefficients de l'equation (11) doivent etre positifs

**Regle 03 :** linearisation du terme source ( dans le cas ou le terme source depend de la temperature ).

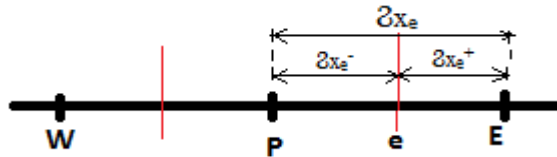
Soit :  $\bar{S} = S_C + S_P T_P$

Donc l'equation (11) devient :  $A_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + S_C \Delta x$        $A_P = a_E + a_W - S_P \Delta x$   
avec

**Regle 04 :** dans un probleme de conduction sans terme source l'equation (11) s'ecrit

$a_p T_p = \sum a_{nb} T_{nb}$        $a_p = \sum a_{nb}$   
Avec

### 2.5.1- Evaluation du flux a l'interface



Le flux a travers la interface(e) est donné par la loi de fourrier :  $\varphi_e = k \frac{T_p - T_e}{\delta x_e^-}$

D'après l'équation (11) et en supposant que le terme source S est nul, on a

$$a_e T_e = a_p T_p + a_E T_E$$

$T_e$  est la température de l'interface (e)

D'où :

$$T_e = \frac{a_p}{a_e} T_p + \frac{a_E}{a_e} T_E$$

Avec

$$a_e = a_p + a_E \quad a_E = \frac{k}{\delta x_e^+} \quad a_p = \frac{k}{\delta x_e^-}$$

Le flux de chaleur :

$$\varphi_e = k \frac{T_p - T_e}{\delta x_e^-}$$

On remplace  $T_e$  par son expression et on obtient :

$$\varphi_e = \frac{k}{\delta x_e^-} \left( T_p - \frac{a_p}{a_e} T_p - \frac{a_E}{a_e} T_E \right)$$

$$\varphi_e = \frac{k}{\delta x_e^-} \left( T_p \left( \frac{a_E}{a_p + a_E} \right) - \frac{a_E}{a_p + a_E} T_E \right)$$

$$\varphi_e = \frac{k}{\delta x_e^-} \left( \frac{a_E}{a_p + a_E} \right) (T_P - T_E)$$

$$\varphi_e = \frac{1}{\left( \frac{K}{\delta x_e^-} \right)^{-1} \frac{a_p + a_E}{a_E}} \frac{T_P - T_E}{1}$$

$$\varphi_e = \frac{1}{\frac{\delta x_e^-}{k} \left( 1 + \frac{\delta x^+}{\delta x^-} \right)} \frac{T_P - T_E}{1}$$

$$\varphi_e = k \frac{T_P - T_E}{(\delta x^- + \delta x^+)}$$

$$\varphi_e = k \frac{T_P - T_E}{\delta x_e}$$

#### 1.4. Conditions aux limites

Pour un problème défini dans un domaine limité par des frontières, il existe 03 types de condition limites :

**Type de Dirichlet** : par exemple la température imposée à la paroi.

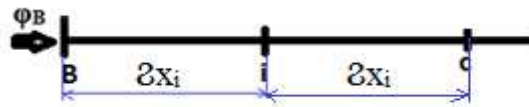
**Type Newman** : Flux de chaleur imposé à la paroi ( $\varphi$  connu)

**Type fourrier** : Flux de chaleur imposé à la paroi par un coefficient d'échange  $h$  et température ambiante  $T_e$ .

- Cas température imposée :

L'équation discrétisé pour le nœud B n'est pas nécessaire

- Cas du flux imposé à la paroi



L'équation de base : 
$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + S = 0$$

$$\left( k \frac{dT}{dx} \right)_i - \left( k \frac{dT}{dx} \right)_B + \int_i^B S dx = 0$$

$$\left( k \frac{T_C - T_B}{\delta x_i} \right) - \varphi_B + \bar{S} \Delta x = 0$$

$$\left( k \frac{T_C - T_B}{\delta x_i} \right) - \varphi_B + (S_C + S_P T_B) \Delta x = 0$$

$$\left( \frac{K}{\delta x_i} - S_P \Delta x \right) T_B = \frac{k}{\delta x_i} T_C + (S_C \Delta x + \varphi_B)$$

C'est de la forme :

$$a_B T_B = a_C T_C + b \quad a_B = \left( \frac{K}{\delta x_i} - S_p \Delta x \right) \quad a_C = \frac{k}{\delta x_i} \quad b = (S_C \Delta x + \varphi_B)$$

- Flux de chaleur imposé à la paroi par un coefficient d'échange h et température ambiante  $T_e$ .  $\varphi_B = h(T_e - T_B)$

Si  $T_B < T_e$  le flux est négatif

Si  $T_B > T_e$  le flux est positif

L'équation

$$\left( k \frac{T_I - T_B}{\delta x_i} \right) - h(T_f - T_B) + (S_C + S_p T_B) \Delta x = 0$$

$$\left( \frac{K}{\delta x_i} - S_p \Delta x + h \right) T_B = \frac{k}{\delta x_i} T_I + (S_C \Delta x + h T_f)$$

C'est de la forme :

$$a_B T_B = a_I T_I + b \quad a_B = \left( \frac{K}{\delta x_i} - S_p \Delta x - h \right) \quad a_I = \frac{k}{\delta x_i} \quad b = S_C \Delta x + h T_f$$

avec

#### 1.4.1- Les équations algébriques

Les équations différentielles régissant sont transformées en un ensemble d'équations algébriques, une pour chaque élément du domaine de calcul. Les équations algébriques sont ensuite assemblées en une matrice globale et des vecteurs qui peuvent être exprimé sous la forme :

$$A[T] = b$$

Où la variable inconnue T est définie à chaque élément intérieur et à la frontière du domaine de calcul. Les valeurs limites pour T sont généralement obtenues à partir des conditions aux limites spécifiées.

Au fur et à mesure que le nombre d'éléments de grille augmente, la solution des équations discrétisées devrait approcher la solution exacte de l'équation différentielle correspondante. Du fait que, à mesure que les éléments de la grille se rapprochent, les changements de T entre les éléments de grille voisins deviennent petits.

#### 1.4.2- Solution des équations discrétisées

La discrétisation de l'équation différentielle se traduit par un ensemble d'équations d'algébriques discrètes, qui doivent être résolues pour obtenir les valeurs discrètes de T. Les coefficients de ces équations peuvent être indépendantes de T (c.-à-d. linéaires) ou dépendantes de T (c.-à-d. non linéaire).

Les techniques pour résoudre ce système algébrique d'équations sont indépendantes de la méthode de discrétisation. Différentes méthodes de résolution peuvent être utilisées pour obtenir une solution.

- Méthodes directes

Dans la méthode directe, la solution du système d'équations est obtenue en appliquant un algorithme relativement complexe, par rapport à une méthode itérative. La méthode directe consiste à l'inversion de matrice pour laquelle la solution est obtenue.

$$[T] = A^{-1}b$$

En général, les méthodes directes sont rarement utilisées en CFD à cause de leurs grandes exigences de calcul et de stockage. Les problèmes actuels en CFD concernent des centaines de milliers de cellules, avec 5 à 10 inconnues par cellule.

Par conséquent, la matrice  $A$  est généralement très grande et la méthode directe devient impraticable pour ces problèmes. En outre, la matrice  $A$  est généralement non linéaire, de sorte que la méthode directe doit être intégrée dans une boucle itérative pour libéraliser la matrice  $A$ .

- Méthodes itératives

Les méthodes itératives suivent une procédure de supposition et de correction pour affiner la solution estimée en résolvant à plusieurs reprises le système d'équations. La méthode itérative de Gauss-Seidel est souvent utilisée.