Chapitre 3 : Analyse dimensionnelle et principe de similitude

1- Introduction

Les équations de Navier–Stokes, de la conservation de masse et d'´energie, ensemble avec leurs conditions aux limites et initiales, sont très complexes et le plus souvent difficiles a résoudre.
Bien que les solutions analytiques restent toujours rares, même après des approximations justifiés les solutions numériques sont parfois lourdes de mise en œuvre et couteuses en temps de calcul. C'est pourquoi on fait bien souvent recours à l'´etude expérimentale soit en vraie grandeur, soit par l'intermédiaire des maquettes a échelle réduite des prototypes.
Les maquettes sont en général moins couteuses que les prototypes et plus facile à mettre en œuvre expérimentalement.
On appelle *prototype* le modèle en vraie nature et *maquette* le modèle réduit étudié expérimentalement.
Pour que les études réalisées sur maquette puissent être transposées au prototype il est important de savoir quels paramètres caractérisent le phénomène étudié et comment interviennent ils. C'est bien cela l'objet de l'analyse dimensionnelle et la theorie de similitude.

2- Rappel sur l'analyse dimensionnelle

Mesurer une grandeur physique X= comparer à une grandeur X_0 de même nature prise arbitrairement :

$$m_x = \frac{X}{X0}$$

2.1- Grandeurs fondamentales :

En mécanique on définit trois *grandeurs fondamentales* :
La longueur L [distance] = L,
La masse M [masse] = M,
Le temps T [temps] = T

A ces trois s'ajoute une quatrième en cas de transfert thermique : la température θ.
On appelle L,M, T et θ *unites fondamentales* desquelles on peut définir des unités dérivées comme montre dans la tableaux suivant.

Grandeur physique	symbole	Dimension	Unité, Système International S.I.
		Unités fondamentales	
Longueur	ℓ	L	m
Temps	t	T	s
Masse	m	M	kg
Température	T	Θ	°K, dégrée Kelvin
		Unités dérivées	
Vitesse	U	$[U] = L\,T^{-1}$	m s^{-1}
Accélération	$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$	$[a] = L\,T^{-2}$	m s^{-2}
Force	F	$[F] = M\,L\,T^{-2}$	kg m s^{-2} = N, Newton
Masse volumique	ρ	$[\rho] = M\,L^{-3}$	kg m^{-3}
Débit	Q	$[Q] = L^3\,T^{-1}$	$m^3\,s^{-1}$
Pression	p	$[p] = M\,L^{-1}\,T^{-2}$	N m^{-2} = Pa, Pascal
Contrainte	σ ou τ	$[\sigma] = M\,L^{-1}\,T^{-2}$	N m^{-2}
Travail	W	$[W] = M\,L^2\,T^{-2}$	N m = J, joule
Énergie	E	$[E] = M\,L^2\,T^{-2}$	N m = J, joule
Quantité de chaleur	ΔQ	$[\Delta Q] = M\,L^2\,T^{-2}$	N m = J, joule
Puissance	$\mathscr{P}$	$[\mathscr{P}] = M\,L^2\,T^{-3}$	N m s^{-1} = W, Watt
Viscosité dynamique	μ	$[\mu] = M\,L^{-1}\,T^{-1}$	kg $m^{-1}\,s^{-1}$
Viscosité cinématique	ν	$[\nu] = L^2\,T^{-1}$	$m^2\,s^{-1}$
Tension superficielle	σ_s	$[\sigma_s] = M\,T^{-2}$	N m^{-1} = kg s^{-2}

2.2- Equation aux dimensions

On appelle une équation aux dimensions d'une grandeur physique est une équation reliant la dimension de cette grandeur a celle des grandeurs fondamentales

$$[X] = T^{\alpha} L^{\beta} M^{\gamma} \theta^{\eta}$$

En général, un phénomène physique est lié a un certain nombre de grandeurs comme, par exemple, une longueur, une masse, une période, une vitesse, la pression, la viscosité, etc.…, disons au nombre N.

La dimension de certains de ces grandeurs peut être dérivée à partir des dimensions d'autres grandeurs. La dimension (et par conséquent l'unité de mesure) de grandeurs physiques sont dérivées soit a partir d'une définition ou soit a partir d'une loi.

Par exemple, alors que la dimension de vitesse U et de masse volumique ρ sont dérivées a partir de leurs définitions en fonction de longueur, ℓ, et temps t, pour la première et de longueur et masse m, pour la dernière :

$$[U] = [\ell]/[t] = LT^{-1},$$

$$[\rho] = [m]/[\ell]^3 = ML^{-3},$$

La force est dérivée selon le principe fondamental de la mécanique (il s'agit d'une loi):

Force (F) = *Masse* (M) × *Accélération* (a)

ce qui entrain $[F] = [m]\times[a] = M\times L\,T^{-2} = M\,L\,T^{-2}$.

Dans ces exemples la longueur, la masse et le temps sont servis comme grandeurs fondamentales pour définir **l'équation aux dimensions**

3- Etape à suivre

Dans un problème d'analyse dimensionnelle on procède en général de la manière suivante :

a- identifier toutes les variables **indépendantes** intervenant dans le problème étudié, soit au nombre N,
b- spécifier les dimensions de ces variables en utilisant les dimensions de base (L, T, M, θ),
c- choisir les grandeurs fondamentales convenables, disons au nombre r,
d- utiliser une méthode appropriée pour identifier le nombre et la forme des paramètres sans dimensions (paramètres adimensionnels).

Il y a deux méthodes utilisées pour l'analyse dimensionnelle :

- la méthode de Rayleigh,
- le théorème des π, ou théorème de Vaschy–Buckingham. On présente ici le théorème des π.

4- Théorème de Buckingham ou théorème des Л

Selon le théorème de Buckingham (ou théorème des Л), dans un problème comprenant n grandeurs physiques où il y a m dimensions fondamentales, on peut réécrire ces grandeurs physiques en (n-m) paramètres adimensionnels indépendants.
Le théorème des Л c'est une technique qui permet d'identifier le nombre et la forme des paramètres adimensionnels qu'on peut utiliser dans les conditions expérimentales.

5- Exemple d'application 1

Un navire, de taille caractérisée par une longueur ℓ, est en mouvement à la vitesse U. L'eau dans laquelle le navire avance exerce une force de résistance (force de trainée), $F_{\text{trainée}}$, au mouvement que l'on peut penser dépendre, a part de ℓ et U, de la masse volumique ρ, de la viscosité dynamique μ et de la tension superficielle σ_s de l'eau ainsi que de l'accélération de la pesanteur g.
Selon la méthode de Rayleigh les la relation recherchée doit être de dimensions homogènes, c'est-`a-dire :

$$F = \rho^{\alpha 1}\, U^{\alpha 2}\, \ell^{\alpha 3}\, \mu^{\alpha 4}\, g^{\alpha 5}\, \sigma_s^{\alpha 6}$$

D'où le tableau des exposants

[Grandeur]	L	T	M	Θ	exposant
$[F_{\text{traînée}}]$	1	-2	1	0	1
$[\rho]$	-3	0	1	0	α_1
$[U]$	1	-1	0	0	α_2
$[\ell]$	1	0	0	0	α_3
$[\mu]$	-1	-1	1	0	α_4
$[g]$	1	- 2	0	0	α_5
$[\sigma_s]$	0	-2	1	0	α_6

Si maintenant l'on examine assez bien le tableau de dimensions on se rend compte assez vite que l'on peut choisir ℓ, U et ρ comme variables fondamentales, soit $r = 3$, de préférence a σ_s, μ et g. Notons au passage que ce choix nous permet de récupérer les variables fondamentales L, T et M `a partir de ℓ, U et ρ. Bien que μ et g sont importants, un choix de μ comme variable fondamentale serait inapproprié car g ne pourrait pas constituer avec ℓ et U un système des variables dimensionnellement indépendantes. Notons aussi que μ, g et σ_s sont des grandeurs indépendantes l'une de des autres.

Ainsi, puisque la relation recherchée doit être dimensionnellement homogène, on déduit les équations suivantes :

	$F_{\text{traînée}}$	ρ	U	ℓ	μ	g	σ_s
somme d'exposants en L :	$+1$	$= -3\alpha_1$	$+\alpha_2$	$+\alpha_3$	$-\alpha_4$	$+\alpha_5$	$+0$
somme d'exposants en T :	-2	$= +0$	$-\alpha_2$	$+0$	$-\alpha_4$	$-2\alpha_5$	$-2\alpha_6$
somme d'exposants en M :	$+1$	$= +\alpha_1$	$+0$	$+0$	$+\alpha_4$	$+0$	$+\alpha_6$

Par la suite, en résolvant par rapport aux variables fondamentales à savoir ℓ, U et ρ que l'on choisi , on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 - \alpha_4 - \alpha_6 \\ \alpha_2 &= +2 - \alpha_4 - 2\alpha_5 - 2\alpha_6 \\ \alpha_3 &= +2 - \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_6 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} F_{\text{traînée}} &= \rho^{1-\alpha_4-\alpha_6}\, U^{2-\alpha_4-2\alpha_5-2\alpha_6}\, \ell^{2-\alpha_4+\alpha_5-\alpha_6} \mu^{\alpha_4}\, g^{\alpha_5}\, \sigma_s^{\alpha_6} \\ &= \rho U^2 \ell^2 \left(\frac{\mu}{\rho U \ell}\right)^{\alpha_4} \left(\frac{g\,\ell}{U^2}\right)^{\alpha_5} \left(\frac{\sigma_s}{\rho U^2 \ell}\right)^{\alpha_6}. \end{aligned}$$

Il est commode de réécrire ce resultat sous la forme

$$F_{\text{traînée}} = \frac{1}{2}\rho U^2 S\, \mathscr{F}(Re, Fr, We)$$

Ou on introduit le coefficient ½ et posé $s=l^2$, avec

$$Re = \frac{\rho \ell U}{\mu} = \frac{\ell U}{\nu}, \qquad Fr = \frac{U^2}{g\ell}, \qquad We = \frac{\rho U^2 L}{\sigma_s}$$

qui sont respectivement les nombres sans dimensions de Reynolds, de Froude et de Weber.

Revenons maintenant au théorème de Vaschy–Buckingham. En total on a, a part de F, N = 6 variables, a savoir : ρ, U, L, μ, g et σs. Soit ρ, U et L les grandeurs fondamentales, au nombre r = 3 choisit de telle manière que les variables restant μ, g et σs sont de dimensions indépendantes. Alors, il existe N – r = 3 paramètres sans dimensions :

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\rho^{\alpha_1} U^{\beta_1} \ell^{\gamma_1}}, \quad \begin{cases} -1 = -3\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \\ -1 = -\beta_1 \\ 1 = \alpha_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1, \\ \beta_1 = 1, \\ \gamma_1 = 1, \end{cases}$$

$$\pi_2 = \frac{g}{\rho^{\alpha_2} U^{\beta_2} \ell^{\gamma_2}}, \quad \begin{cases} 1 = -3\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \\ -2 = -\beta_2 \\ 0 = \alpha_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 0, \\ \beta_2 = 2, \\ \gamma_2 = 1 \end{cases}$$

$$\pi_3 = \frac{\sigma_s}{\rho^{\alpha_3} U^{\beta_3} \ell^{\gamma_3}}, \quad \begin{cases} 0 = -3\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 \\ -2 = -\beta_3 \\ 1 = \alpha_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 1, \\ \beta_3 = 2, \\ \gamma_3 = 1 \end{cases}$$

avec

$$\pi = \frac{F_{\text{traînée}}}{\rho^{\alpha} U^{\beta} \ell^{\gamma}}, \quad \begin{cases} 1 = -3\alpha + \beta + \gamma \\ -2 = -\beta \\ 1 = \alpha \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1, \\ \beta = 2, \\ \gamma = 2. \end{cases}$$

Ainsi, on obtient :

$$\pi = \frac{F_{\text{traînée}}}{\rho U^2 \ell^2}, \quad \pi_1 = \frac{\mu}{\rho U \ell}, \quad \pi_2 = \frac{g\ell}{U^2}, \quad \pi_3 = \frac{\sigma_s}{\rho U^2 \ell}$$

et l'on retrouve la relation

$$F_{\text{traînée}} = \rho U^2 \ell^2 \mathscr{F}(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = \rho U^2 \ell^2 \mathscr{F}(Re, Fr, We).$$

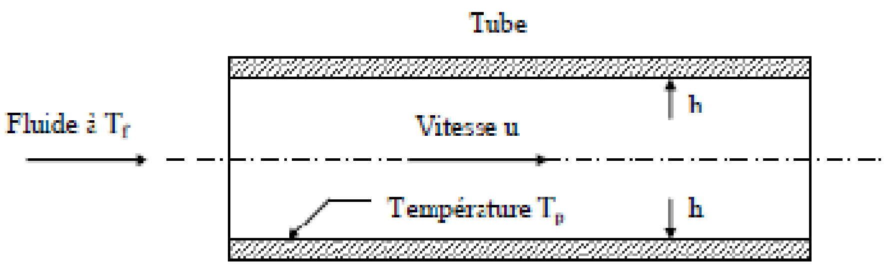
D'après ces résultats, on tire les conclusions suivantes :

- L'analyse dimensionnelle montre comment interviennent les différents paramètres, mais sans fournir la forme précise de la relation.
- L'´etude expérimentale de la résistance au mouvement d'un navire se revient à étudier la fonction :

$F_{\text{trainée}} = \rho U^2 \ell^2 F$ (Re, Fr,We), appelée la fonction de résistance ou de trainée au mouvement de navire.

Exemple d'application 2

Considérons un fluide en circulation forcée dans une canalisation cylindrique pour lequel on se propose de déterminer le coefficient de convection h relatif au transfert de chaleur fluide-paroi qui correspond à une convection forcée :



Détermination des grandeurs physiques :

Il faut déterminer tous les paramètres dont dépend la densité de flux de chaleur φ (liée à h par $\varphi = h\,\Delta T$), ce sont ici :

- Les caractéristiques du fluide :
- λ coefficient de conductibilité thermique
-C_P chaleur massique
- ρ masse volumique
- μ viscosité dynamique
- Les caractéristiques de l'écoulement
- u vitesse moyenne du fluide
- La géométrie de la surface d'échange
- D diamètre de la conduite
- L'écart de température paroi-fluide ΔT

d'où f (λ, Cp, ρ, μ, u D, φ, ΔT)

Equation dimension de chaque grandeur :

Il faut ensuite écrire l'équation aux dimensions fondamentales M, L, T, q, Q de chacune des grandeurs, ce qui s'écrit ici :

λ:	$Q.\,T^{-1}.L^{-1}.\theta^{-1}$
C_p :	$Q.M^{-1}.\theta^{-1}$
ρ :	$M.L^{-3}$
μ :	$M.T^{-1}.L^{-1}$
u :	$L.T^{-1}$
D :	L
T :	θ
φ:	$Q.T^{-1}.L^{-2}$

Détermination des groupements Л :

Il faut maintenant choisir 5 équations de base (Toutes les dimensions fondamentales ont été utilisées) de façon à ce que les 5 dimensions fondamentales figurent au moins une fois dans l'ensemble des équations.

Prenons par exemple : λ, ρ, u, D, ΔT, il reste φ, cp et μ.

On écrit alors les 3 rapports sans dimension correspondants à ces variables sous la forme :

$$\pi_1 = \frac{\varphi}{T^{a_1}\,\lambda^{b_1}\rho^{c_1}\,D^{d_1}\,u^{e_1}} \quad ; \quad \pi_2 = \frac{C_p}{T^{a_2}\,\lambda^{b_2}\rho^{c_2}\,D^{d_2}\,u^{e_2}} \quad ; \quad \pi_3 = \frac{\mu}{T^{a_3}\,\lambda^{b_3}\rho^{c_3}\,D^{d_3}\,u^{e_3}}$$

Pour chaque rapport Л, on remplace les grandeurs physiques par leurs équations dimensions ce qui donne par exemple pour $Л_1$:

$$[\pi_1] = \frac{Q\,T^{-1}\,L^{-2}}{\theta^{a1}\,(Q\,T^{-1}\,L^{-1}\,\theta^{-1})^{b1}\,(M\,L^{-3})^{c1}\,L^{d1}\,(L\,T^{-1})^{e1}}$$

Pour chaque dimension fondamentale, on identifie les exposants de puissance entre numérateur et dénominateur relatifs à une même dimension ce qui conduit au système :

(Q) : $1 = b_1$

(T) : $-1 = -b_1 - c_1$

(L) : $-2 = -b_1 - 3c_1 + d_1 + e_1$
(θ) : $0 = a_1 - b_1$
(M) : $0 = c_1$
Le rapport Л1 s'écrit donc :

$$\pi_1 = \frac{\phi D}{\Delta T \lambda}$$

Ce qui avec φ= h Δθ peut encore s'écrire :

$$\pi_1 = \frac{h D}{\lambda}$$

On obtient de la même manière :

$$\pi_2 = \frac{\rho u D c_p}{\lambda} \quad \text{et} \quad \pi_3 = \frac{\mu}{\rho D u}$$

Le théorème de Vaschy-Buckingam nous permet d'affirmer que la relation :

$$f(\lambda, cp, \rho, \mu, u, D, \Delta T, \varphi) = 0$$

entre 8 variables peut s'exprimer à l'aide des trois nombres sans dimension Л1, Л2 et Л3 sous la forme :

f (Л1, Л2, Л3) = 0 ou Л1 = f(Л2, Л3).

Signification physique de ces groupements :

$$\pi_1 = \frac{h D}{\lambda}$$

Le nombre de Nusselt, C'est donc le rapport de la résistance thermique de conduction par la résistance thermique de convection. Il est d'autant plus élevé que la convection est prédominante sur la conduction.

$$\pi_3 = \frac{\mu}{\rho D u} = \frac{1}{Re}$$

C'est l'inverse du nombre de Reynolds qui caractérise le régime d'écoulement dans la canalisation.

$$\pi_2 = \frac{\rho u D c_p}{\lambda}$$

C'est le nombre de Peclet On petit aussi l'écrire : $Pe = \frac{\rho u D}{\mu} \cdot \frac{c_p \mu}{\lambda}$ et faire apparaître un nouveau nombre adimensionnel : $Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda}$ appelé nombre de Prandtl. Ce nombre est calculable pour un fluide donné indépendamment des conditions expérimentales (il ne dépend que de la température) et caractérise l'influence de la nature du fluide sur le transfert de chaleur par convection. On préfère donc chercher une relation sous la forme :

$$\boxed{Nu = f(Re, Pr)}$$

Quelque définition des nombres adimensionnels et explications

Paramètre	Définition	Explication	Domaine d'application
Nombre de Reynolds	$Re = \frac{\rho U L}{\mu}$	$\frac{\text{force d'inertie}}{\text{force visqueuse}}$	Écoulements visqueux
Nombre de Froude	$Fr = \frac{U^2}{Lg}$	$\frac{\text{force d'inertie}}{\text{force de la pesanteur}}$	Écoulement à surface libre
Nombre de Mach	$Ma = \frac{U}{c}$	$\frac{\text{vitesse d'écoulement}}{\text{vitesse de son}}$	Écoulement compressible
Rapport de capacités thermique	$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$	$\frac{\text{enthalpie}}{\text{énergie interne}}$	Transfert thermique
Nombre de Strouhal	$St = \frac{(L/U)}{\tau}$	$\frac{\text{temps d'advection}}{\text{temps de variation locale}}$	Écoulement instationnaire
Nombre de Prandtl	$Pr = \frac{\kappa}{\nu}$	$\frac{\text{diffusivité thermique}}{\text{diffusivité visqueuse}}$	Transfert thermique
Nombre de Péclet	$Pe = \frac{(L/U)}{\lambda/(\rho\ c_p U^2)}$	$\frac{\text{temps d'advection}}{\text{temps de diffusion thermique}}$	Transfert thermique
Nombre d'Eckert	$Ec = \frac{U^2}{c_v\ \Delta T}$	$\frac{\text{variation d'énergie cinétique}}{\text{variation d'énergie interne}}$	Transfert thermique
Nombre de Weber	$We = \frac{\rho U^2 L}{\sigma_s}$	$\frac{\text{force d'inertie}}{\text{force de tension superficielle}}$	Écoulement à surface libre
Coefficient de frottement	$C_D = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2}$	$\frac{\text{force de traînée}}{\text{force dynamique}}$	Aérodynamique, Hydrodynamique
Rugosité adimensionnelle	$\frac{\varepsilon}{L}$	$\frac{\text{rugosité}}{\text{longueur caractéristique}}$	Écoulement turbulent, surface rugueuse

6- Similitude et théorie des maquettes

L'étude expérimentale est le plus souvent nécessaire mais, les essais en vraie grandeur (par exemple d'un barrage, d'une construction portuaire, de navire en bassin, d'une turbine ou d'un avion, etc.) sont rares et très couteux. C'est pourquoi on fait souvent recours aux modèles aux échelles réduites (appelés *maquettes*) du système en vraie grandeur (appelé *prototype*) a étudier.

Pour que les résultats obtenus expérimentalement sur maquette puissent être extrapolés au prototype, un nombre des principes de similitude doit être respectés. Pour mettre en évidence ces principes on écrit d'abord les équations de Navier–Stokes, ainsi que les conditions aux limites et initiales, sous une forme adimensionnelle. L'état de tout écoulement se caractérise par des données géométriques, cinématique, dynamiques, ou encore thermodynamiques y compris les valeurs des grandeurs physiques du fluide μ, ρ, k, Cp et Cv.

6.1- Similitude géométrique :

Toute les dimensions linéaire de maquette correspondent aux celles de prototype par un facteur d'´echelle constante Kg : En notant en se référant, par exemple, au bateau schématisé il vient que :

$$k_g = \frac{H_p}{H_m} = \frac{L_P}{L_m} = \frac{D_p}{D_m} = \frac{D_1}{D_2}$$

Où Kg est un facteur d'échelle géométrique.

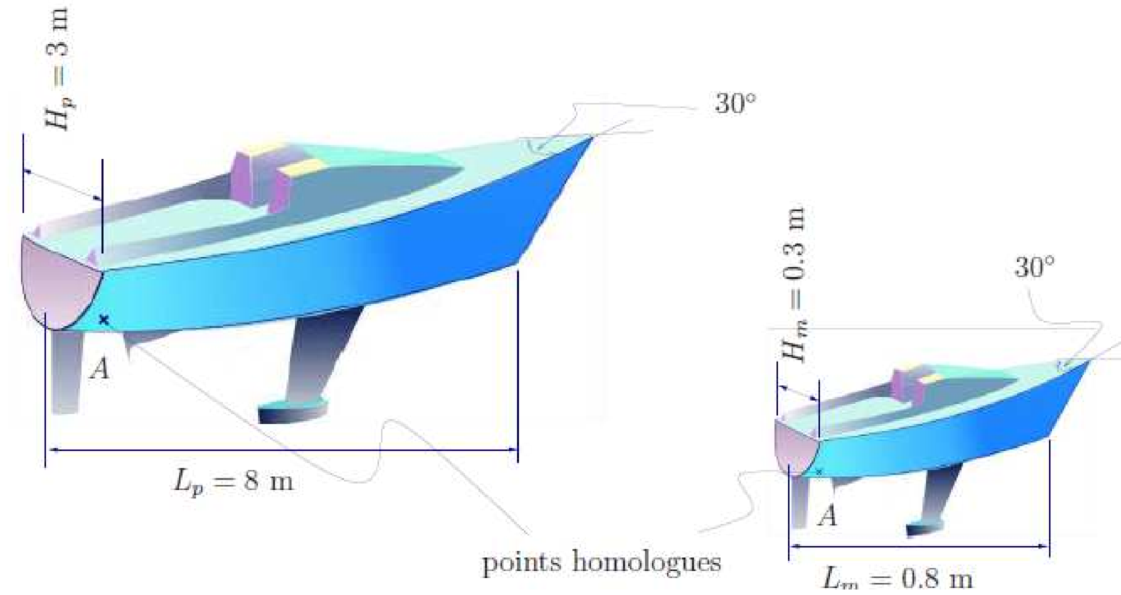


Figure 2 : similitude géométrique

Les dimensions de maquette sont telles que les points homologues satisfont la relation :

$$H_p/H_m = L_p/L_m = D_1/D_2 = K_g.$$

6.2- Similitude cinématique :

Toutes les vitesses homologues aux points homologues sont liées par

$$\frac{U_1}{U_2} - k_t\frac{D_1}{D_2} - k_y k_t - k_c - \text{ Cte}$$

Les vitesses aux points homologues sont proportionnelles par un facteur d'échelle constant, Kc.

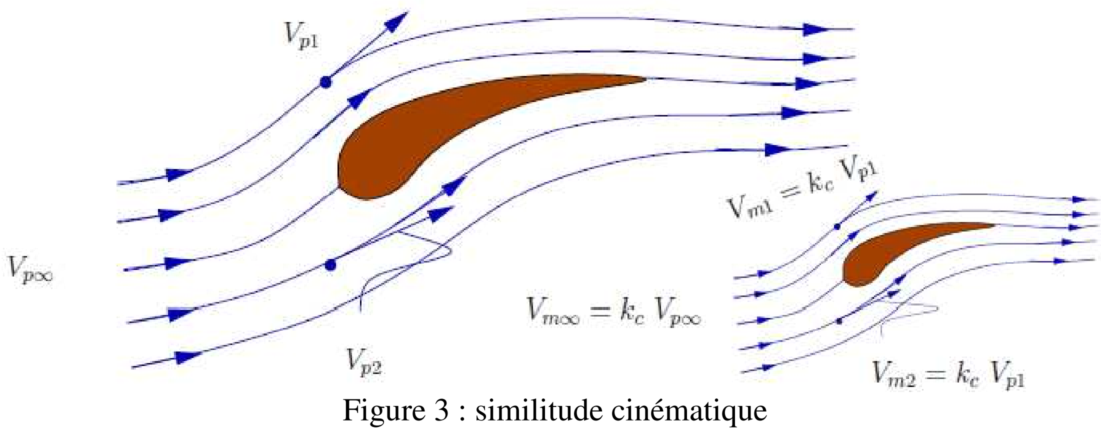


Figure 3 : similitude cinématique

6.3- Similitude dynamique :

De la même manière on peut montrer que les forces aux points matériels homologues sont aussi homologues, c'est-à-dire, elles sont proportionnelles par un facteur d'´echelle constant, Kd.

Pour des fluides homogènes, par exemple, la distribution des masses dans la maquette et le prototype sont semblable, et par conséquent la similitude géométrique entraîne la similitude de masse.

Selon le principe fondamental de la dynamique, les forces sont proportionnelles aux accélérations.

$$\frac{p_1^*}{p_2^*} = \frac{\rho_1 U_1^2}{\rho_2 U_2^2} = k_m k_g^3 k_c^2 = \text{Cte}$$

Où K_m est une constante de proportionnalité entres les masses de prototype et de maquette.

Par le même, Les forces sont entre elles comme :

$$\frac{F_1^*}{F_2^*} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{U_1^2}{U_2^2}\frac{D_1^2}{D_2^2} = \text{Cte} = k_d$$

En général, la similitude dynamique exige que les conditions suivantes soient satisfaites :

(a) Ecoulement incompressible sans surfaces libres : $Re_p = Re_m$.

(b) Ecoulement incompressible avec surfaces libres : $Re_p = Re_m$, $Fr_P = Fr_m$.

(c) Ecoulement compressible : $Re_p = Re_m$, $Ma_p = Ma_m$, $\gamma_p = \gamma_m$

(d) Ecoulement avec tension superficielle : $Re_p = Re_m$, $We_p = We_m$

Résumons :

(1) La similitude géométrique exige que l'´echelle linéaire de longueur kg soit la même.

(2) La similitude cinématique exige que l'´echelle linéaire et l'échelle de temps soient les mêmes, c'est-à-dire, l'échelle de vitesse k_c soit la même.

(3) La similitude dynamique requiert que les échelles linéaires, de temps et de force sont les mêmes.

Exemple d'application :

Pour estimer la force de frottement, F_p, sur un prototype sonde, on utilise les données obtenues sur une maquette testée dans une soufflerie. Au tableau ci-dessous sont montrées les données de teste et les caractéristiques du prototype.

Paramètre	Prototype	Maquette
Géométrie	Sphère	Sphère
D	0.4 m	0.15 m
V	2.5 m/s	à déterminer
F	à déterminer	25 N
ρ	1000 kg/m^3	1.2 kg/m^3
ν	1.3×10^{-6} m^2/s	1.5×10^{-5} m^2/s

Solution. La force de frottement F sur une sphère dépend de la vitesse de l'écoulement, V, de diamètre D, de la densité de fluide ρ et la viscosité cinématique μ. Alors selon le théorème des π on a N = 4. Les variables D, V et ρ sont indépendants et constituent donc des grandeurs fondamentales, au nombre r = 3, pour ce problème. On a donc 2 paramètres à déterminer

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\rho^{\alpha_1} D^{\beta_1} V^{\gamma_1}}$$

$$\pi = \frac{F}{\rho^{\alpha} D^{\beta} V^{\gamma}} \mathscr{F}(\pi_1)$$

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\rho D V} = \frac{\nu}{D V} = \frac{1}{Re}, \qquad \pi = \frac{F}{D^2 \rho V^2}.$$

L'analyse dimensionnelle montre alors que la force de frottement est liée au nombre de Reynolds par un paramètre sans dimension appelé le coefficient de frottement, ou plutôt le coefficient de trainée pour cet exemple :

$$C_D = \mathscr{F}\left(\frac{F/D^2}{\rho V^2}\right) = \mathscr{F}(Re).$$

Or, le nombre de Reynolds est connu pour le prototype :

$$Re_p = \frac{2.5 \text{ m/s} \times 0.4 \text{ m}}{1.3 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 7.69 \times 10^6,$$

ce qui conduit, selon le principe de la similitude, `a

$$Re_m = Re_p = \left(\frac{VD}{\nu}\right)_m$$

Et par la suite on trouve

$$V_m = \left(\frac{7.69 \times 10^6 \times 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}}{0.15 \text{ m}}\right) = 76.9 \text{ m/s}.$$

La similitude exige

$$C_D|_p = C_D|_m$$

Ce qui donne pour la force de frottement sur le prototype :

$$F_p = F_m \left(\frac{\rho_p}{\rho_m} \frac{V_p^2}{V_m^2} \frac{D_p^2}{D_m^2}\right) = 156.58 \text{ N}$$