

Chapitre 2 : Théorie de la couche limite

1- Introduction

On s'intéresse dans cette partie à des écoulements externes, pour lesquels un écoulement unidirectionnel doit contourner un obstacle, en général solide. Expérimentalement, on constate que si la courbure de l'obstacle est modérée, les lignes de courant suivent la surface, et les variations spatiales de vitesse interviennent dans la direction normale à la surface (figure 2.1), et sont concentrées dans une couche de faible épaisseur. C'est **la couche limite**.



Figure 2.1- Ecoulement autour d'un véhicule

2- Observations expérimentales.

Observons l'écoulement incident à une vitesse infinie amont $U(u,v)$ arrivant parallèlement à une plaque plane d'épaisseur négligeable au bord d'attaque (Fig. 2.2). La mesure du champ de vitesses au-dessus de la plaque montre que la vitesse vaut U dans presque tout l'écoulement (zone bleue), sauf dans une zone d'épaisseur faible s'élargissant progressivement lorsque l'on s'éloigne du bord d'attaque.

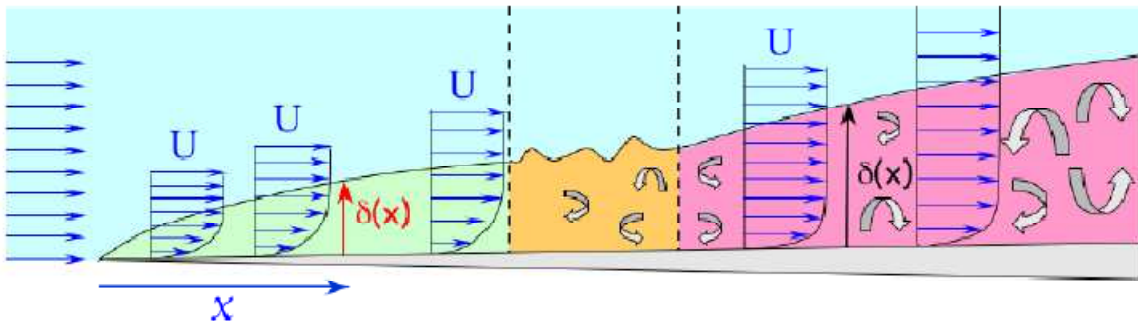


Figure 2.2 - couche limite

La présence des forces de viscosité rend toute particule fluide en contact avec la surface immobile relativement à cette dernière : l'écoulement près de la paroi est ralenti, On sait que la vitesse est nulle sur la surface de la plaque, et on comprend donc que la vitesse passe de 0 à

U lorsque l'on se déplace dans cette fine couche perpendiculairement à la plaque et on y observe **un fort gradient de vitesse** normal à la paroi, $\partial u/\partial y$. La zone où ces effets se produisent est généralement “fine”, et dénommée *couche limite*.

3- Localisation de la transition laminaire-turbulent

On peut commencer par chercher à quelle distance x_c s'effectue la transition. Les paramètres du problème sont x_c , U , μ la viscosité du fluide et ρ sa densité. La méthode de Buckingham montre que l'on ne peut former qu'un nombre adimensionnel avec ce jeu de variables, qui n'est autre que le Reynolds de transition Re_C . La transition (figure 2.3) s'effectue donc pour :

$$Re_C = \frac{\rho U_\infty x_C}{\mu} = C^{te}$$

► Écoulement laminaire si $Re_x = \frac{\rho U_\infty x}{\mu} < Re_c = \frac{\rho U_\infty x_c}{\mu} \simeq 5 \times 10^5$

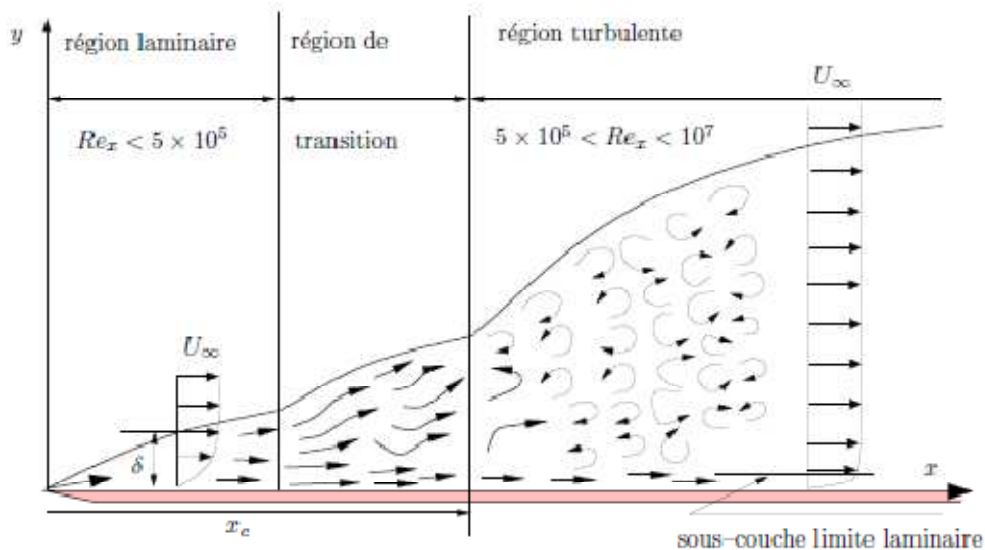


Figure 2.3 – transition de la couche limite

4- Epaisseur de la couche limite

Par convention, la couche limite aura une épaisseur δ tel que on tout point de la courbe d'épaisseur la vitesse $U=0.99U_\infty$. Les variables sont donc, l'épaisseur δ , l'abscisse x , μ , ρ et U . Le théorème de Buckingham montre alors que :

$$\frac{\delta}{x} = f\left(\frac{\rho U_\infty x}{\mu}\right) = f(Re_x)$$

Où Re_x est le nombre de Reynolds basé sur x . L'expérience montre que f est une fonction décroissante : plus le Reynolds est élevé, moins vite la couche limite augmente avec x . La forme la plus simple pour f est a priori :

$$\frac{\delta}{x} = \frac{K}{Re_x^b}$$

Où b est un nombre positif, et K une constante.

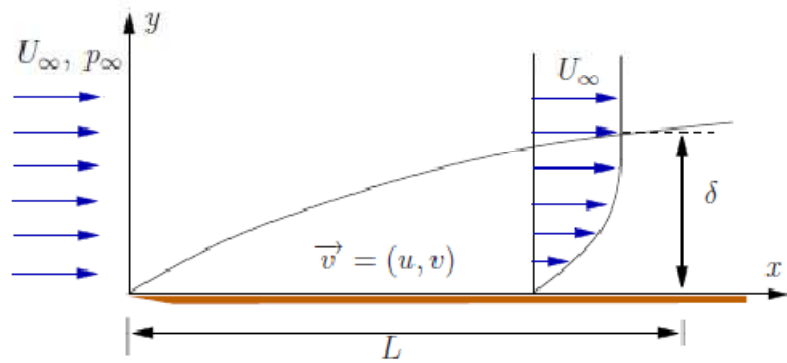


Figure 2.4- Couche limite sur une plaque plane

- Nous allons voir par un raisonnement physique simple que $b = 1/2$ en laminaire,
- Pour le cas turbulent, on trouvera $b = 1/7$

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{5}{\text{Re}_x^{1/2}} \quad \text{en laminaire} \quad \frac{\delta(x)}{x} = \frac{0.16}{\text{Re}_x^{1/7}} \quad \text{en turbulent}$$

Souvent l'épaisseur de la couche limite est définie par la valeur de y pour laquelle $u=U_\infty(0.99)$. Pour l'écoulement le long d'une plaque plane cette définition se traduit par :

5- Frottement à la paroi. Coefficients de traînée

On note ζ_w la contrainte de frottement visqueux à la paroi. Dans le cas laminaire, on rappelle que la contrainte de frottement à la paroi s'écrit :

$$\tau_w(x) = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\text{paroi}}$$

Cette contrainte dépend de x puisque le gradient de vitesses évolue le long de la plaque. On adimensionnalise la contrainte locale à la paroi par $1/2\rho U^2$, ce qui définit : coefficient de frottement local

$$c_w(x) = \frac{\tau_w(x)}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

Le calcul de la traînée sur une plaque de longueur L et de largeur b est uniquement liée à la contrainte de cisaillement et se déduisent donc simplement de la connaissance de la contrainte ζ_w par :

$$F_D = \int_0^L \tau_w(x) b \, dx = \frac{1}{2}\rho U^2 b \int_0^L c_w(x) \, dx$$

Pour calculer le coefficient de traînée, on divise la force de traînée par $1/2\rho U^2 S$ où $S = bL$ est la surface de la plaque:

$$C_D \sim \frac{1}{Re_L^{1/2}}$$

On obtient donc le résultat remarquable indiquant que le coefficient de trainée est indépendant du Reynolds en turbulent, ce qui signifie que la force de trainée varie comme U^2 .

Le coefficient de trainée sur une plaque de longueur L est donné par :

$$C_D = \frac{1.328}{Re_L^{1/2}} \text{ en laminaire} \quad C_D \sim C^{te} \text{ turbulent}$$

6- Décollement des couches limites

Le phénomène de décollement de couche limite est clairement visible sur la figure 2.5. Les lignes de courant longent la surface du solide jusqu'à un point donné, où elles en décollent. La zone formée en aval est le sillage et donne lieu à une forte dissipation d'énergie, et par conséquent engendre une force de trainée conséquente.

Le décollement ne peut se produire que lorsque la pression à l'extérieur de la couche limite augmente dans le sens de l'écoulement ($dp/dx > 0$). On parle de gradient de pression adverse ou défavorable. Ce gradient de pression renverse localement le sens de l'écoulement.

La figure 2.5 suivante présente l'évolution de la vitesse et de la pression autour d'un obstacle. Dans la partie gauche, la vitesse augmente, donc la pression diminue dans le sens de l'écoulement. Inversement la pression augmente avec x dans la partie droite, favorisant le phénomène de décollement.

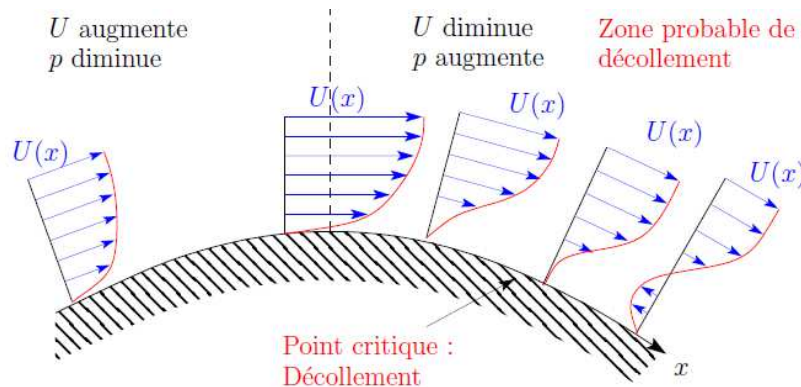


Figure 2.5- décollement de la Couche limite

7- Equations de la couche limite – théorie de Prandtl (1904)

Les écoulements des fluides réels sont régis par les équations de Navier-Stokes qui sont des équations difficiles à résoudre. Les équations de Navier-Stokes et la conservation de la masse sous forme adimensionnelle, rappelées ci-dessous, mais en négligeant les forces volumiques :

$$\Delta \vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \vec{u}$$

Dans la couche limite, la mise en équations de ce type d'écoulement est simplifiée, car ce dernier est localement unidirectionnel, et la concentration des gradients de vitesse dans une couche permet d'envisager des approximations. Ce type de méthode a été initié par Prandtl et prolongée par son élève Blasius en 1908. L'étude des couches limites permet de calculer relativement simplement la force de traînée d'origine visqueuse exercée par l'obstacle. C'est d'ailleurs l'origine de l'intérêt pour ces configurations aux débuts de l'aéronautique.

8- Principe de la théorie de Prandtl.

Il s'agit de calculer le profil des vitesses dans la couche limite laminaire, Nous présenterons cette théorie pour la plaque plane. La grande force de la théorie est de rester valable pour des profils présentant un rayon de courbure très grand devant l'épaisseur de la couche limite.

La résolution exacte des équations de Navier-Stokes est impossible, mais Prandtl en a trouvé une solution approximative, en remarquant deux choses :

- l'écoulement est quasiment uni-directionnel,
- la couche limite est très fine, donc toutes les grandeurs varient beaucoup plus suivant y que suivant x , soit $\delta/\delta y \gg \delta/\delta x$.

Dans ces conditions, on montre que pour le problème bidimensionnel sur une plaque plane les équations de NS se réduisent à

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U(x) \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

On voit que ces équations de Prandtl sont assez similaires à celles des écoulements unidirectionnels, sauf que la conservation de la masse reste inchangée.

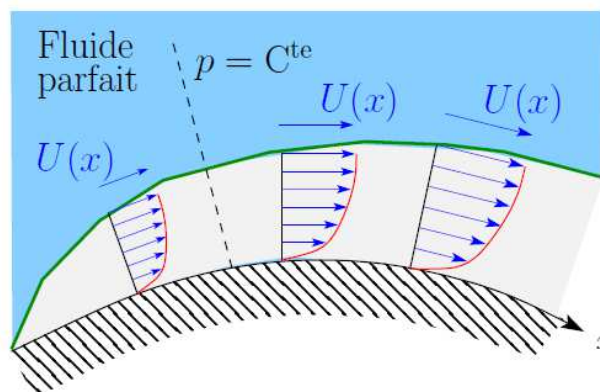


Figure 2.6 - Théorie de la couche limite

A l'extérieur de la couche limite, le fluide peut être considéré comme parfait. La théorie des écoulements irrotationnels y est applicable pour calculer $U(x)$. En injectant le résultat dans les équations de Prandtl, on peut les intégrer pour trouver le champ de vitesses $(u; v)$ dans la couche limite. On a la possibilité de résoudre ces équations par :

- La solution exacte par la méthode de Blasius,
- Méthode numérique,
- Etudes expérimentales (PIV et fil chaud).

9- Paramètres caractéristiques de la couche limites.

Le caractère asymptotique de l'épaisseur de la couche limite nous permet aussi d'introduire des définitions basées sur les notions de conservation de la masse, quantité de mouvement et d'énergie. Dans cette optique, on introduit respectivement les définitions :

- l'épaisseur de déplacement δ_1 ,
- l'épaisseur de la quantité de mouvement δ_2 ,
- l'épaisseur en énergie δ_3 .

a) **Epaisseur de déplacement.** C'est le déplacement δ_1 des lignes de courant de l'écoulement non visqueux (potentiel) extérieurement à la couche limite. Pour fixer les idées, considérons les débits volumiques en fluide parfait Q_p et en fluide visqueux Q_v comptés de la plaque $y = 0$ à la cote $y = h$ lorsque celle-ci tend vers l'infini :

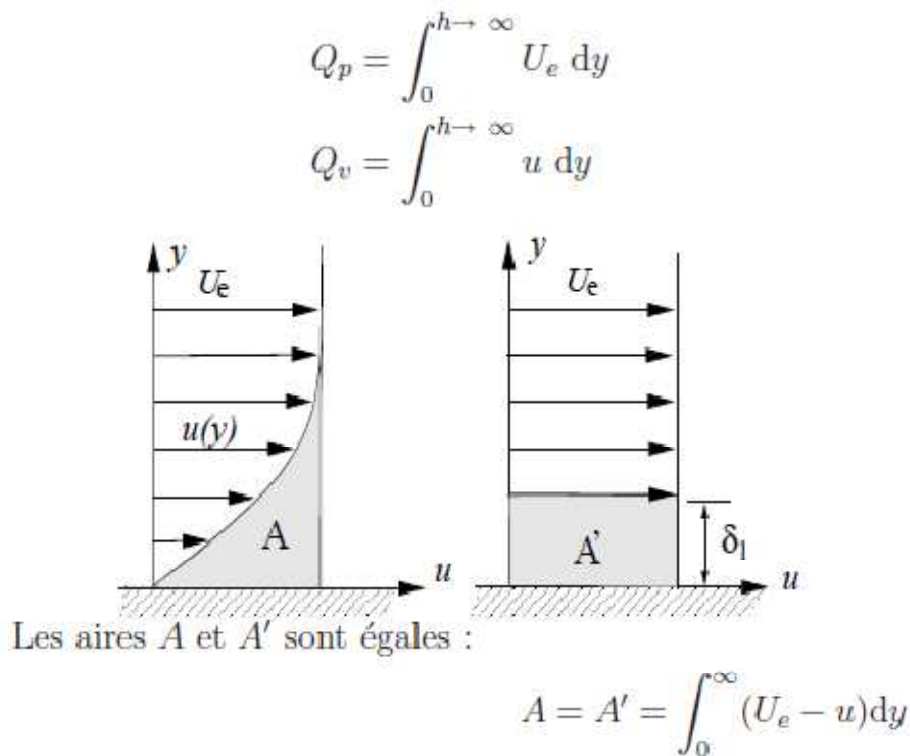


Figure 2.7- Définition de l'épaisseur de déplacement δ_1

L'épaisseur de déplacement permet alors de décrire le déficit de débit $Q_p - Q_v$ comme si l'écoulement près de la paroi était en fluide parfait :

$$U_e \delta_1 = \int_0^{h \rightarrow \infty} U_e dy - \int_0^{h \rightarrow \infty} u dy$$

$$\delta_1 = \int_0^{h \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy.$$

Alors, δ_1 représente le déplacement que devrait subir chaque point de la paroi pour qu'un écoulement fictif à vitesse constant U_e s'effectuant entre $y = \delta_1$ et l'infini, voir la figure 2.7.

b) Epaisseur de la quantité de mouvement.

De la même manière on définit l'épaisseur de la quantité de mouvement δ_2 , qui représente la quantité de mouvement massique déviée vers le haut dû à la couche limite:

$$U_e^2 \delta_2 = \int_0^{h \rightarrow \infty} U_e u dy - \int_0^{h \rightarrow \infty} u^2 dy$$

$$\delta_2 = \int_0^{h \rightarrow \infty} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy,$$

c) Epaisseur en énergie δ_3 :

On définit l'épaisseur de l'énergie δ_3 qui représente la quantité d'énergie déviée vers le haut dû à la couche limite:

$$U_e^2 (U_e \delta_3) = \int_0^{h \rightarrow \infty} U_e^2 u dy - \int_0^{h \rightarrow \infty} u^3 dy$$

$$\delta_3 = \int_0^{h \rightarrow \infty} \frac{u}{U_e} \left(1 - \frac{u^2}{U_e^2} \right) dy,$$