Chapitre 1 : cinématique des fluides

La cinématique des fluides *est l'étude du mouvement d'un corps qui se trouve être un fluide ou plus précisément c'est l'étude du mouvement d'une particule de fluide. Étudier le mouvement signifie, dans un premier temps, définir des entités mathématiques pour décrire le mouvement (position, déplacement, vitesse, accélération, déformation…). Étudier le mouvement, cela veut dire ensuite mettre en place des méthodes et écrire des équations qui permettent de décrire le mouvement au cours du temps. Cette étape est nécessaire, en particulier pour écrire le principe fondamental de la dynamique pour un fluide, en effet, il faut définir l'accélération du corps étudié (ici le fluide) pour pouvoir écrire ce principe.*

1- Introduction

1.1- Notion de particule de fluide

Une masse de fluide peut être conçue comme un ensemble de particules fluides. Le concept de **particule de fluide** est relié directement à l'´echelle mesoscopique. Celle-ci à une taille suffisamment grande devant la taille microscopique pour comprendre une quantité N de particules, cela justifie le modèle continu.
La particule de fluide est très petite devant la taille de la masse fluide, de sorte qu'on puisse considérer qu'elle est quasi-ponctuelle (point matériel).

1.2- Position d'une particule de fluide

Soit une particule de fluide de volume dv est centrée sur un point M de l'espace 3D et a pour masse volumique ρ. Soit t le temps et une échelle de temps. Cette particule occupe la position OM. À un instant t, la particule de fluide se trouve au point M de l'espace dont l'origine est le point O. À un instant t_0, la particule de fluide se trouve au point M_0.

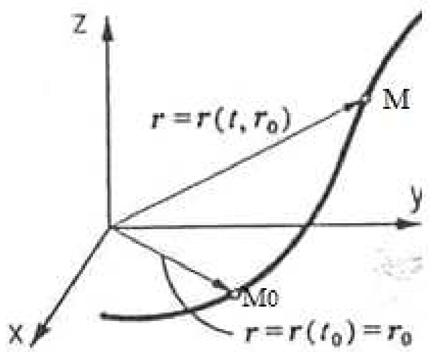


Fig.1 : Trajectoire d'une particule qui, à t = to se trouve en r = ro.

1.3- Notion de champs

Pour décrire des entités physiques, on utilisera la notion de champ: champ de vitesse, champ d'accélération, champ de masse. Ces champs seront des fonctions de l'espace et du temps qui permet d'exprimer la grandeur physique considérée pour chaque particule.

2- Méthodes de description d'un écoulement

Pour la description mathématique d'un écoulement, on dispose de deux méthodes différentes :

2.1- Description lagrangienne

La description utilisée en mécanique du point est la description lagrangienne. En mécanique des fluides il s'agit de "suivre" au cours du temps une particule de fluide. On étudie donc, le mouvement d'une particule de fluide déterminée. Le vecteur-lieu r_0 (x_0,y_0,z_0) de la particule à un temps initial t_0 est donc utilisé comme étiquette (figure 1). l'écoulement est décrite, quand on connaît le vecteur-lieu r de la particule, qui est une fonction de r_0 et du temps t : $r = r(r_0, t)$.
Avec cette description, toutes les inconnues du problème (coordonnées (x,y,z) de la position de la particule de fluide à un instant t, vitesse) s'écrivent en fonction de $(x_0;y_0;z_0;t)$. En particulier, les composantes de la vitesse (u_x, u_y, u_z). La vitesse $U(u_x\ u_y\ u_z)$ peut être calculer :

$$u = \left(\frac{dx}{dt}\right)_{x_0,y_0,z_0} \qquad v = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x_0,y_0,z_0} \qquad w = \left(\frac{dz}{dt}\right)_{x_0,y_0,z_0}$$

L'accélération est :

$$a_x = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{x_0,y_0,z_0} \qquad a_y = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_{x_0,y_0,z_0} \qquad a_z = \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_{x_0,y_0,z_0}$$

Les inconvénients de cette représentation sont liés au fait que les fluides sont composés d'un très grand nombre de particules. Les interactions entre les particules sont donc difficiles à décrire. La méthode lagrangienne n'est donc pas pratique pour des applications réelles.

2.2- Description Eulérienne (Leonhard Euler, 1707-1783)

On utilisera en mécanique des fluides la description eulérienne, cette description consiste à connaitre les champs (scalaires ou vectoriels) définis en chaque point r = xi + yj + zk et a chaque instant t. Ainsi, on parlera de la vitesse V (x, y, z, t) = u i+vj+wk qui coïncide, à l' instant t avec la vitesse V de la particule de fluide qui se trouve a t en x, y, z. les composantes du champ de vitesse sont :

$$\frac{dx}{dt} = u(x,y,z,t) \qquad \frac{dy}{dt} = v(x,y,z,t) \qquad \frac{dz}{dt} = w(x,y,z,t)$$

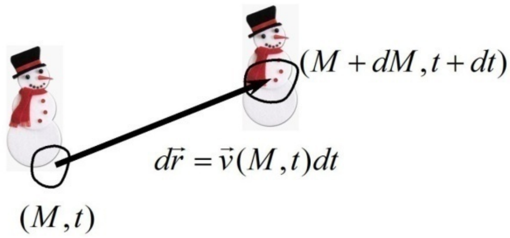
La description eulérienne consiste à étudier le mouvement du fluide à des endroits fixes. Contrairement a la description de Lagrange qui fournit des caractéristiques de l'écoulement en fonction du temps mais jamais aux mêmes endroits (la position de la particule ne cesse de varier). Ainsi, on peut suivre l'évolution temporelle de la vitesse en un point M fixe : on obtient la vitesse de la particule de fluide qui se trouve en M à l'instant t de la mesure. Il s'agit donc à chaque fois d'une particule différente.
La différence entre les deux descriptions est donc, que du point de vue de Lagrange, on décrit les variations de la vitesse, de l'accélération d'un point matériel particulier, alors que selon le point de vue d'Euler, on décrit ces mêmes quantités dans une région spatiale donnée sans individualiser les particules matérielles.
L'ensemble des vecteurs vitesses des particules forme un champ de vecteurs : V(r,t) = v(x,y,z,t) dépendant à la fois de l'espace et du temps : les variables d'espace (x,y,z) et le temps t sont des variables indépendantes. L'approche eulérienne décrit l'état d'un fluide en

mouvement en lui associant des champs : champ des vitesses, champ de pression, champ de température, ...

La description eulérienne est particulièrement adaptée dans le cas des écoulements stationnaires. Un écoulement stationnaire (ou écoulement en régime permanent) est un écoulement pour lequel la vitesse en tout point M est indépendante du temps. Dans un écoulement stationnaire, la vitesse est constante en tout point fixe mais la vitesse des particules de fluide varie.

- **Détermination de l'Accélération eulérienne**

Imaginer un petit bonhomme sur une particule fluide (toujours la même) : les variations des grandeurs qu'il mesure (vitesse, pression, masse volumique, ...) sont des variations particulaires, c'est-à-dire des variations de grandeurs liées à la même particule qui se déplace au cours du temps.



Calcul de l'accélération d'une particule de fluide en formalisme eulérien :

Apres un instant Δt, les coordonnées et les vitesses subissent les changements (x+Δx, y+Δy, z+Δz) et (u+Δu, v+Δv, w+Δw) respectivement. En développant en série de Taylor , on a :

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t + \mathrm{O}(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial v}{\partial t}\Delta t + \mathrm{O}(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$$

$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t + \mathrm{O}(\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$$

Par conséquent, comme Δx=u.Δt et Δy=v.Δt et Δz=wΔt :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w = a_x$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w = a_y$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w = a_z$$

Ou $$\underbrace{\frac{d}{dt}}_{derive\acute{e}particuliere} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{deriv\acute{e}etemporelle} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v + \frac{\partial}{\partial z}w}_{deriv\acute{e}econvective}$$

Soit encore :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\,\vec{v}$$

$(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\,\vec{v}$: la dérivée convective, qui indique un caractère non uniforme de $\vec{v}$. On peut montrer que :

$$(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$$

- $\dfrac{\partial v}{\partial t}$: la dérivée locale, qui indique un caractère non permanent de $\vec{v}$.

$\vec{v}$ dans le membre de gauche désigne la vitesse de la particule fluide (d / dt) est appelée dérivée particulaire, encore notée D/Dt) alors que dans les autres termes, $\vec{v}$ désigne le champ des vitesses dans tout le fluide.

Enfin, le terme (v. grad).v permet de rendre compte que, même dans un écoulement stationnaire (dans le sens eulérien du terme), aux variations spatiales de la vitesse correspondent des accélérations pour les particules.

On peut résumer les types d'écoulements en fonction des accélérations dans le tableau suivant :

Type d'écoulement	Accélération temporelle	Accélération convective
uniforme et stationnaire	0	0
non-uniforme et stationnaire	0	$\neq 0$
instationnaire et uniforme	$\neq 0$	0
instationnaire et non-uniforme	$\neq 0$	$\neq 0$

3- Lignes de courant et trajectoires

3.1- Lignes de courant

En suivant une particule de fluide dans son mouvement et en relevant l'endroit où se trouve la particule quand le temps varie, on obtient la trajectoire de la particule. Etant donné que la relation entre le vecteur vitesse v et le vecteur lieu r est obtenue par v = dr/dt, les trajectoires de particules sont les intégrales des équations différentielles suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t); \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t); \quad \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t)$$

dans lesquelles t a une valeur fixe et joue le rôle d'un paramètre.

Les lignes de courant changent de position par rapport au temps. Si l'écoulement est stationnaire, les particules suivent continuellement les mêmes trajectoires engendrant ainsi les mêmes lignes de courant.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{u}{v};\quad \frac{dy}{dz} = \frac{v}{w};\quad \frac{dz}{dx} = \frac{w}{u} \qquad (3.2)$$

Les lignes de courant sont donc données par les intégrales du système différentiel

$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)} \qquad (3.3)$$

Pour un instant fixé, lorsqu'une ligne est tracée de façon à ce que le vecteur vitesse soit tangent à cette ligne, en chacun de ses points, alors cette courbe est appelée ligne de courant. Soit d*s*

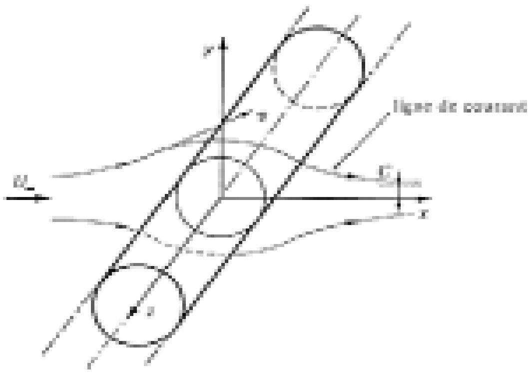


Figure 2 : ligne de courant

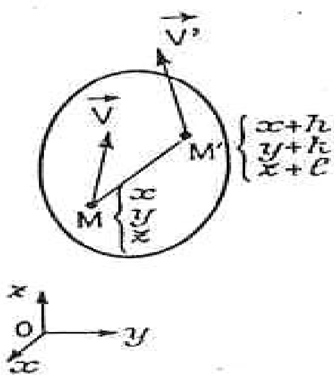
3.2- Tube de courant.

On appelle *tube de courant* l'ensemble des lignes de courant s'appuyant au même instant sur un contour fermé quelconque. Un tube de courant est défini de telle sorte qu'il n'y ait pas d'intersection entre les lignes de courant

4- Analyse du mouvement d'un élément de volume (Translation, rotation et déformation)

Au cours du mouvement, chaque élément de volume de fluide subit des changements de position, d'orientation, de forme que nous allons déterminer.

Soit à l'instant t un élément de volume quelconque entourant le point M(x,y,z), et M'(x+h, y+k, z+l) un point voisin **de ce même élément** (figure 3. 21).



Soient $V\,(u,v,z)$ la vitesse en M et $V'(u,v,z)$ la vitesse en M'. Nous pouvons écrire

$$u' = u(x+h, y+k, z+1) = u + h\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + 1\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$v' = v(x+h, y+k, z+1) = v + h\frac{\partial v}{\partial x} + k\frac{\partial v}{\partial y} + 1\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$w' = w(x+h, y+k, z+1) = w + h\frac{\partial w}{\partial x} + k\frac{\partial w}{\partial y} + 1\frac{\partial w}{\partial z}$$

En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur.
Considérons la première de ces équations, nous pouvons l'écrire :

$$u' = u + \frac{1}{2}\left[1\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) - k\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + h\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}k\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}l\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Faisant de même pour les deux autres, nous introduisons les quantités

$$\zeta_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad g_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\zeta_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad g_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\zeta_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad g_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Et nous aurons :

$$u' = u + (\zeta_y\, l - \zeta_z\, k) + h\frac{\partial u}{\partial x} + k\, g_3 + l\, g_2$$

$$v' = v + (\zeta_z\, h - \zeta_x\, l) + k\frac{\partial v}{\partial y} + h\, g_3 + l\, g_1$$

$$w' = w + (\zeta_x\, k - \zeta_y\, h) + l\frac{\partial w}{\partial z} + l\, g_2 + k\, g_1$$

La rotation d'un élément de volume peut donc être représentée par le vecteur ζ, qui aurait trois composantes suivant les axes x, y, z.
La composante de rotation d'une particule autour d'un axe, par exemple parallèle à l'axe des z, est définie de cette façon comme la vitesse angulaire moyenne de 2 éléments droits infinitésimaux de cette particule, perpendiculaires entre eux et à l'axe z.
Le sens positif est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Soit ζ_x, ζ_y, ζ_z les 3 composantes du vecteur rotation. La grandeur du vecteur est donnée

par $\zeta^2 = \zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2$ exprimés en radians/s.

La vitesse angulaire du segment dx vaut par exemple

$$\frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

La vitesse angulaire du segment dy vaut :

$$\frac{u + \frac{\partial u}{\partial y} dy - u}{dy} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

En utilisant la convention de signe énoncée plus haut.
Par définition, la rotation de l'élément de volume autour de l'axe z vaut :

$$\zeta_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Or, le vecteur de projection ζ_X, ζ_Y, ζ_Z, appelé **vecteur tourbillon** T du champ de vitesse, est égal à la moitié du vecteur rotationnel :

T = 1/2 rot V

Ainsi, la vitesse au point M' peut être considérée comme le résultat de la composition géométrique de trois vitesses :
a. une vitesse dont les projections sont : u, v, w et qui correspond à une translation en bloc de la particule avec la vitesse V
b. une vitesse dont les projections sont :

$r_1 = \zeta_y\, l - \zeta_z\, k$

$r_2 = \zeta_y\, h - \zeta_x\, l$ et qui correspond à une rotation en bloc de vitesse angulaire $\vec{T}$

$r_3 = \zeta_x\, k - \zeta_y\, h$

c. une vitesse dont les projections sont :

$$d_1 = h\frac{\partial u}{\partial x} + k\,g_3 + l\,g_2$$

$$d_2 = h\,g_3 + k\frac{\partial v}{\partial y} + l\,g_1 \quad \text{et qui correspond à une déformation } D.$$

$$d_3 = h\,g_2 + k\,g_1 + l\frac{\partial w}{\partial z}$$

On a donc : $V' = V + T \wedge MM' + D$

On peut montrer que $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ sont des vitesses de déformation linéaire (vitesse de dilation). Ainsi un élément MM' parallèle à Ox, de longueur h, devient au bout du temps dt, un élément $M_1M'_1$, de longueur $h\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}dt\right)$.

De même $2g_1$, $2g_2$, $2g_3$ sont des vitesses de déformation angulaire. Ainsi, deux éléments MM' et MN' initialement parallèles aux axes Ox et Oy, donc faisant entre eux un angle de 90°, Parallélisme des droites se conserve, et un petit parallélépipède rectangle se transforme en un autre parallélépipède d'angle différent. Ces trois mouvements fondamentaux peuvent être schématisés par les figures suivantes (3.23). Si on introduit la fonction de déformation φ telle que

$$\varphi(h,k,l) = \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial u}{\partial x} + k^2\frac{\partial v}{\partial y} + l^2\frac{\partial w}{\partial z}\right) + kl\,g_1 + lh\,g_2 + hk\,g_3$$

Il est facile de voir que les composantes d_1, d_2, d_3 de la vitesse de déformation sont les dérivées partielles de φ :

$$d_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial h} \quad d_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial k} \quad d_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial l}$$

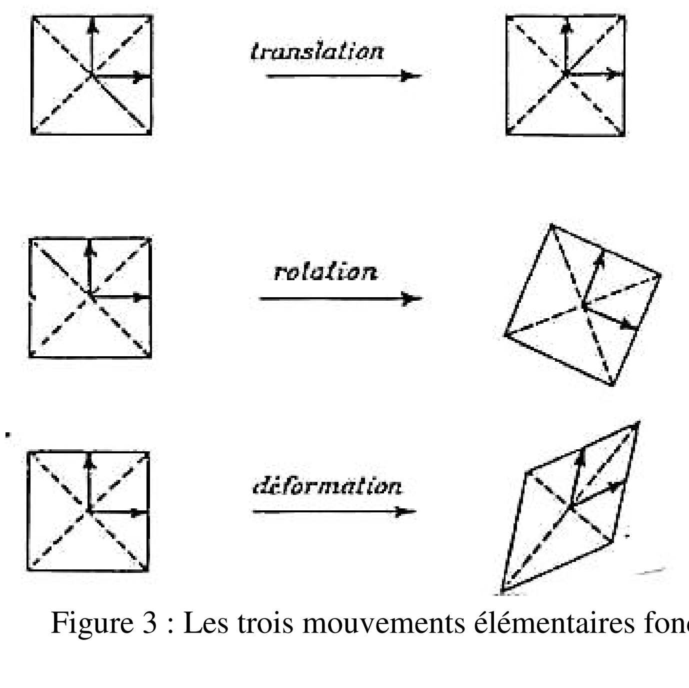


Figure 3 : Les trois mouvements élémentaires fondamentaux

La décomposition que nous venons de faire, due à Helmholtz, est la seule pour laquelle la vitesse de déformation puisse se présenter sous la forme précédente (c'est-à-dire dérive d'un potentiel - φ). On peut donc écrire :

$$V' = V + T \wedge MM' + \text{grad}\ \varphi$$

- **Vecteur tourbillon**

Le tourbillon, parfois appelé vorticité (du latin vortex), est une formulation mathématique de la dynamique des fluides reliée à la quantité de vitesse angulaire ou de rotation que subit un fluide localement.

Une façon simple de visualiser le tourbillon est de considérer un fluide en mouvement dans lequel on délimite un petit volume rigide.

Si cette parcelle tourne par rapport à un référentiel au lieu de translater, elle tourbillonne.

On définit alors, pour un fluide, le vecteur tourbillon par :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}(\vec{v})$$

Ce vecteur représente le vecteur rotation (locale) d'une particule de fluide. Un écoulement est dit non tourbillonnaire (ou irrotationnel) si le vecteur tourbillon est nul en tout point. Dans le cas contraire, l'écoulement est dit tourbillonnaire.

Un champ des vitesses de la forme :

$$\vec{v} = \frac{k}{r^2}\vec{u}_\theta$$

On peut calculer le vecteur tourbillon :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\left[\frac{k}{r^2}\vec{u}_\theta\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{k}{r}\right)\vec{u}_z = -\frac{k}{2}\frac{1}{r^3}\vec{u}_z$$

5- Notion de circulation du vecteur vitesse:

Soit le champ de vecteurs vitesse $\vec{\mathbf{V}}$. On définit la circulation du vecteur $\vec{\mathbf{V}}$ le long d'une courbe quelconque (C) reliant les points A et B par l'intégrale:

$$\Gamma = \int_{(C)} \vec{\mathbf{V}} \cdot \overrightarrow{dl}$$

où $\overrightarrow{dl}$ est l'élément d'arc orienté de la courbe.

Notons que la circulation élémentaire $d\Gamma$ s'écrit

$$d\Gamma = \vec{\mathbf{V}} \cdot \overrightarrow{dl} = \overrightarrow{grad}\ \varphi \cdot \overrightarrow{dl} \equiv d\varphi$$

où la variation de la fonction φ est prise le long de la courbe. Sous forme intégrale, on pourra écrire

$$\Gamma = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A$$

6- Écoulement potentiel

Pour la **dynamique des fluides,** un écoulement est potentiel lorsque son champ des vitesses ***v*** est le gradient d'une fonction scalaire, le potentiel des vitesses φ :

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi$$

Les écoulements potentiels servent le plus souvent à décrire des écoulements de fluides parfaits, c'est-à-dire des écoulements où la viscosité peut être négligée. Un écoulement potentiel est toujours irrotationnel.

Rot v = 0 ou $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Un écoulement est irrotationnel quand la viscosité est négligeable (équation d'Euler avec l'hypothèse que le champ de forces extérieures dérive d'un potentiel).

Puisque le rotationnel d'un gradient est toujours égal à zéro, $\nabla \times \nabla\varphi = \mathbf{0},$

Si l'écoulement est incompressible, la divergence de ***v*** est égale à zéro :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Le potentiel des vitesses φ est alors une solution de l'équation de Laplace :

$$\nabla^2\varphi = 0,$$

où $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$est le Laplacien, ou l'opérateur laplacien, parfois aussi notéΔ. A deux dimensions, les équations des écoulements potentiels sont très simples et peuvent être étudiées.

6.1- Cas d'un écoulement potentiel dans un plan

Nous étudions l'écoulement potentiel en tenant compte des hypothèses suivantes :

- l'écoulement est incompressible,
- l'écoulement conservatif,
- l'écoulement permanent.

Les fonctions potentielles complexes sont utilisées pour étudier les écoulements plans, incompressibles, parfaits, stationnaires et irrotationnels. On choisit des coordonnées orthonormées *(x,y)* pour représenter un point de l'écoulement

M (x, y); le champ de vitesse est

$$\mathbf{V}=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}$$

D'autre part, la dérivée partielle par rapport à la coordonnée z est nulle: $\frac{\partial}{\partial z} = 0$

<u>Incompressible:</u>

$\rho = Cte$: - hypothèse réaliste pour les liquides

- souvent employée pour les gaz à faibles vitesses

Dans ce cas, l'équation de bilan de masse se réduit à *div* **V** = *0* , soit

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Stationnaire: $\frac{\partial}{\partial t}=0$

Chaque variable a, en tout point, une valeur indépendante du temps, mais qui peut être différente d'un point un autre (non uniformité).

Parfait : Les effets de viscosité sont négligeables.

Irrotationnel: La condition d'irrotationnalité s'écrit rot V= 0 pour un écoulement plan:

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{\mathbf{V}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}u\\ v\\ 0\end{bmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\frac{\partial v}{\partial z}=0\\ \frac{\partial u}{\partial z}=0\\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0\end{cases}$$

6.2- Fonction courant et fonction potentiel

a) Fonction courant

La condition d'incompressibilité s'écrit: div V = 0. On peut toujours définir un vecteur A tel que v= rot A puisque div (rot)=0.

Il vient que :

$$\vec{\mathbf{V}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}A_x\\ A_y\\ A_z\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}u(x,y)=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\\ v(x,y)=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\\ 0=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\end{cases}$$

Parmi tous les choix possibles, il existe une fonction $\psi(x,y)$ telle que le vecteur

$$\vec{\mathbf{A}}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi(x,y) \end{bmatrix}$$

répond à la question.

C'est à dire si $\vec{\mathbf{V}}\begin{bmatrix} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix}$, alors on a:

$$div\,\vec{\mathbf{V}} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$$

En admettant la fonction $\psi(x,y)$ continue, ceci implique la commutativité des dérivées

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}$$

Ainsi, la relation $div\,\vec{\mathbf{V}} = 0$ est bien vérifiée.

La fonction $\psi(x,y)$ telle que $\begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$ s'appelle ***fonction de courant***.

b) <u>Fonction potentiel</u>:

La condition d'irrotationnalité s'écrit

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{\mathbf{V}} = 0$$

On peut toujours définir une fonction $\varphi(x,y)$ telle que

$$\vec{\mathbf{V}} = \overrightarrow{grad}\,\varphi$$

puisque $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\right)=0$.

On a vu que dans le cas plan,

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{\mathbf{V}}\quad\begin{cases}0\\0\\\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$$

Or $\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$

Hypothèse: $\varphi(x,y)$ continue $\quad\Rightarrow\quad \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\quad\Rightarrow\quad\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

La fonction telle que $\begin{cases}u=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\\v=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\end{cases}$ s'appelle ***fonction potentiel*** ou ***potentiel des vitesses***.

2- <u>Propriétés</u>:

a) $d\psi(x,y)=\dfrac{\partial\psi}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\psi}{\partial y}dy=-v\,dx+u\,dy$

Or $\quad\vec{\mathbf{V}}\wedge\overrightarrow{dM}=\begin{bmatrix}u\\v\\0\end{bmatrix}\wedge\begin{bmatrix}dx\\dy\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\u\,dy-v\,dx\end{bmatrix}$

Donc $d\psi(x,y)=\left(\vec{\mathbf{V}}\wedge\overrightarrow{dM}\right)_z$

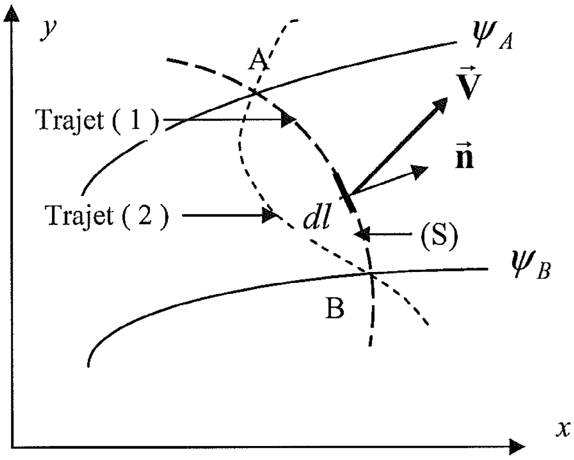
$$d\psi(x,y)=0\quad\Leftrightarrow\quad\vec{\mathbf{V}}\wedge\overrightarrow{dM}=0\quad\Leftrightarrow\quad\vec{\mathbf{V}}\ //\ \overrightarrow{dM}$$

Conséquence: $\psi=Cte$ est une ligne de courant dont l'équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}$$

b- Fonction courant et débit:

Soient A et B deux points pris respectivement sur deux lignes de courant distinctes $\psi = \psi_A$ et $\psi = \psi_B$.



L'expression algébrique du débit volumique à travers la surface transversale S est:

$$\dot{Q}_v = \iint_S \vec{\mathbf{V}}.\vec{\mathbf{n}}\, dS$$

où $\vec{\mathbf{n}}$ est la normale extérieure à S.

En choisissant l'unité d'envergure comme dimension transversale et en désignant par dl l'élément de longueur sur l'arc AB, on a: $dS = 1 \times dl$ et par conséquent

$$\dot{Q}_v = \int_A^B \vec{\mathbf{V}}\,.\,\vec{\mathbf{n}}\, dl$$

Or $$\vec{\mathbf{V}}\,.\,\vec{\mathbf{n}}\, dl = \left(u\frac{dy}{dl} - v\frac{dx}{dl} \right) dl = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \equiv d\psi$$

(En effet, $\vec{\mathbf{n}} = \cos\alpha\, \vec{x} + \sin\alpha\, \vec{y}$ avec $\cos\alpha = \dfrac{dy}{dl}$ $\quad et \quad$ $\sin\alpha = -\dfrac{dx}{dl}$)

Il vient $$\dot{Q}_v = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A$$

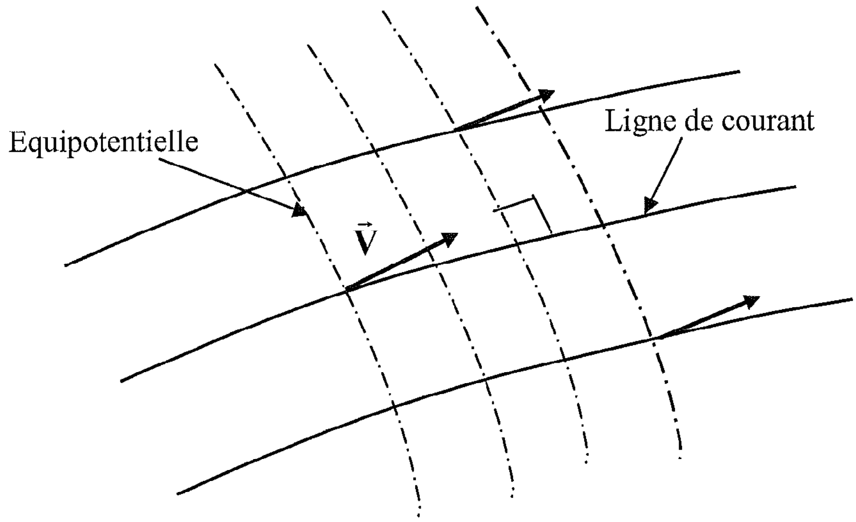
La différence des valeurs des constantes des deux lignes de courant est égale à la valeur du débit volumique du fluide passant entre ces deux lignes de courant. On notera que le résultat est indépendant du parcours suivi entre A et B.

c- $d\varphi(x,y)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dy=u\,dx+v\,dy$

$$\Rightarrow \qquad d\varphi(x,y)=\vec{\mathbf{V}}\,.\,\overrightarrow{dM}$$

$$d\varphi=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{\mathbf{V}}\,.\,\overrightarrow{dM}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{\mathbf{V}}\perp\overrightarrow{dM}$$

Conséquence: $\varphi=Cte$ est orthogonale à la ligne de courant $\psi=Cte$.



d- $\Delta\psi(x,y)=\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(-v)+\frac{\partial}{\partial y}(u)=0$$

d'après la condition d'irrotationnalité $\overrightarrow{rot}\,\vec{\mathbf{V}}=0$

$$\Delta\varphi(x,y)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

d'après la condition d'incompressibilité du fluide ($div\,\vec{\mathbf{V}}=0$)

Ces fonctions dont le Laplacien est nul, sont dites ***fonctions harmoniques***. Il existe des techniques expérimentales pour trouver leurs solutions.

6.3- Fonction potentiel complexe :

1- Fonctions analytiques:

Tout point du plan Oxy peut être représenté par un nombre complexe $z = x + iy$.

Soit $f(z) = f(x+iy)$ une fonction de la variable complexe supposée uniforme, c'est à dire à une valeur de la variable z correspond une seule valeur de la fonction $f(z)$.
La dérivée d'une fonction uniforme est définie comme la limite

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Si cette limite existe et est indépendante de la façon dont Δz tend vers zéro on dit que la fonction est analytique.
Pour examiner les conditions d'indépendance, donnons à z un accroissement Δz, duquel résulte un accroissement Δf pour f.
Désignons par Φ et Ψ les parties réelles et imaginaires de $f(z)$. On peut écrire

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta \Phi + i\Delta \Psi}{\Delta x + i\Delta y}$$

A la limite, ce rapport est égal à

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{d\Phi + id\Psi}{dx + idy} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + i\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy\right)}{dx + idy}$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)dx + i\left(\frac{1}{i}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)dy}{dx + idy} \qquad (1)$$

Si cette limite est indépendante de dz, elle doit être aussi indépendante de $\frac{dx}{dy}$, c'est à dire de l'orientation du petit segment dz. Par conséquent, on doit avoir:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad (2)$$

(En effet, il suffit d'écrire que la dérivée du rapport (1) par rapport à la variable $\frac{dx}{dy}$ est nulle).

Ce qui entraîne $\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ ce qui est bien indépendant de $\frac{dx}{dy}$.

En égalant les termes réels et imaginaires de la relation (2), on obtient:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad et \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \qquad (3)$$

Ces conditions dites de CAUCHY-RIEMANN sont caractéristiques d'une fonction $f(z)$ dérivable. On peut vérifier que Φ et Ψ satisfont l'équation de Laplace.
On dit que la fonction $f(z)$ est ***analytique***. Les règles de calcul des dérivées s'appliquent aux fonctions analytiques de la même façon que dans le domaine réel.

Une fonction ***holomorphe*** est une fonction à la fois continue, uniforme et analytique.

2- Existence de la fonction potentiel complexe:

Nous avons vu au paragraphe I-2-c) que la fonction courant ψ et la fonction potentiel φ satisfont à l'équation de Laplace et à la condition CAUCHY-RIEMANN puisque

$$\Delta\psi = \Delta\varphi = 0 \qquad \text{et} \qquad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Elles peuvent être donc considérées respectivement comme la partie réelle et la partie imaginaire d'une seule et même fonction holomorphe de la variable complexe $z = x + iy$:

$$f(z) = \varphi + i\psi$$

$f(z)$ est appelée ***fonction potentiel complexe de l'écoulement***.

3- Propriété:

$f(z)$ ne dépend que de la variable z.

En effet, aux variables (x,y) on peut associer deux complexes $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$.
Effectuons le changement de variables $(x, y) \rightarrow (z, \bar{z})$ et montrons que f ne dépend pas de $\bar{z}$ (en général, une fonction de deux variables reste une fonction de deux variables après transformation).

La différentielle de f s'écrit:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \qquad (4)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \qquad (5)$$

Pour pouvoir comparer, il est nécessaire d'écrire les deux expressions précédentes avec les mêmes variables. Pour cela, remarquons que:

$$x = \frac{1}{2}\left(z + \bar{z}\right) \qquad \text{et} \qquad y = \frac{-i}{2}\left(z - \bar{z}\right)$$

l'équation (4) s'écrit donc

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\left(dz + d\bar{z}\right)\right] + \frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{-i}{2}\left(dz - d\bar{z}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\bar{z}$$

En comparant avec (5), on obtient:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \end{cases}$$

ou alors:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + i\dfrac{\partial \psi}{\partial x} - i\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right] = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + i\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + i\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right] = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \end{cases}$$

Or $\qquad \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = u \qquad \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = v \qquad \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -v \qquad \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = u$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1}{2}(u+u) + \dfrac{i}{2}(-v-v) = u - iv \\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}(u-u) + \dfrac{i}{2}(-v+v) = \quad 0 \end{cases}$$

En définitive, on a:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \qquad \text{donc } f \text{ ne dépend que de z}$$

et

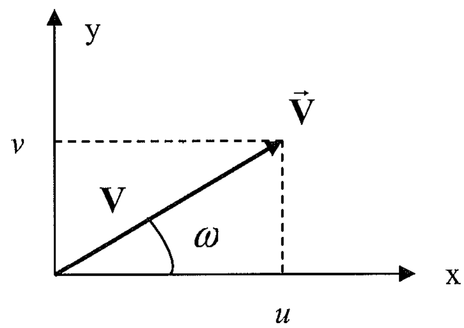
$$\frac{df}{dz} = u - iv$$

4- <u>Vitesse complexe</u>:

On pose $\mathbf{w} = \dfrac{df}{dz} = u - iv$ appelée ***fonction vitesse complexe.***

Avec les composantes u et v de la vitesse $\vec{\mathbf{V}}$ on peut former $\overline{\mathbf{w}} = u + iv$ image du vecteur vitesse dans le plan complexe. C'est un nombre complexe de module $\mathbf{V}$ et d'argument ω:

$$\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{V}\, e^{i\omega}$$



$\Rightarrow$ La vitesse complexe a pour module $\mathbf{V}$ et pour argument $-\omega$:

$$\mathbf{w} = \mathbf{V}\, e^{-i\omega}$$

Cette fonction est également holomorphe. En effet, d'après les conditions d'incompressibilité $div\, \vec{\mathbf{V}} = 0$ et d'irrotationnalité $\overrightarrow{rot}\, \vec{\mathbf{V}} = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

qui ne sont rien d'autre que les conditions de Cauchy pour la partie réelle u et la partie imaginaire ($-v$) de la vitesse complexe, on déduit que

$$\Delta u = \Delta v = 0$$

5- Principe de superposition de deux écoulements:

Ce principe découle de la propriété de linéarité des équations régissant le champ de vitesse telle qu'elle apparaît dans les conditions $\Delta u = \Delta v = 0$.

Soient $f_1(z)$ et $f_2(z)$ deux fonctions potentiel complexe de deux écoulements E_1 et E_2 s'effectuant dans un même domaine (D). L'écoulement E obtenu par superposition de ces deux écoulements est représenté par la combinaison linéaire de ces fonctions dans ce même domaine

$$f(z) = \lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z)$$

soit
$$f(z) = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + i\,(\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2)$$

$$= \quad \varphi \quad + i \quad \psi$$

Le vecteur vitesse du champ résultant est:

$$\vec{\mathbf{V}} = \overrightarrow{grad}\,\varphi = \lambda_1\,\overrightarrow{grad}\,\varphi_1 + \lambda_2\,\overrightarrow{grad}\,\varphi_2$$

$$= \lambda_1 \quad \vec{\mathbf{V}}_1 \quad + \quad \lambda_2 \quad \vec{\mathbf{V}}_2$$

6- Principe de matérialisation d'une ligne de courant:

La condition de fluide parfait peut être introduite à travers des considérations aux limites. En effet, l'adhérence à la paroi d'un solide que l'on observe en fluide réel (ou visqueux) se traduit, dans un repère local lié au solide par la double égalité:

$$\vec{\mathbf{V}}_n = \vec{0} \qquad et \qquad \vec{\mathbf{V}}_t = \vec{0}$$

où $\vec{\mathbf{V}}_t$ et $\vec{\mathbf{V}}_n$ désignent les projections respectives du vecteur vitesse au point de contact dans le plan tangent à la surface de l'obstacle et selon la normale à celle-ci.

6.4- Exemple de fonctions potentiel complexe:

1 - Ecoulement uniforme:

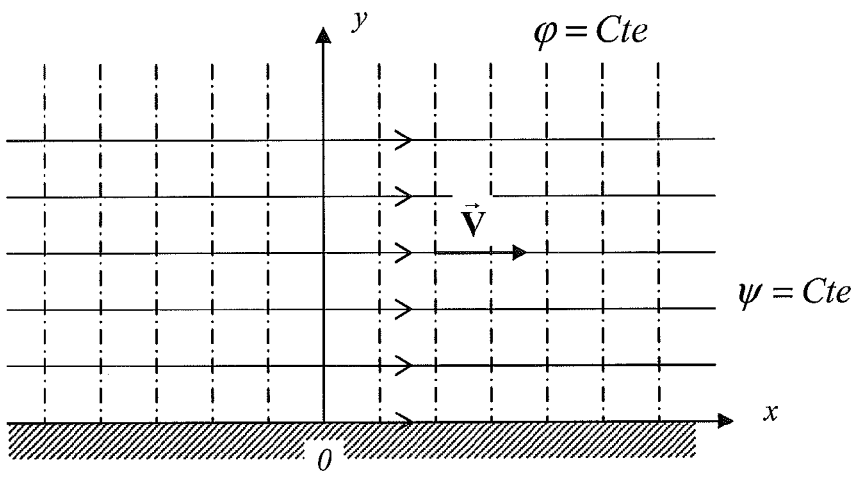
$f(z) = a\,z$ où a est une constante réelle positive.

$$f(z) = a\,(x + iy) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varphi = a\,x \\ \psi = a\,y \end{cases}$$

$\varphi = Cte \quad \Leftrightarrow \quad x = Cte \quad \Rightarrow$ droites // Oy

$\psi = Cte \quad \Leftrightarrow \quad y = Cte \quad \Rightarrow$ droites // Ox

$$\mathbf{w} = \frac{df}{dz} = u - iv = a \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = a > 0 \\ v = 0 \end{cases}$$



$\psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \qquad \Rightarrow$ Ecoulement uniforme // Ox au dessus du plan $y = 0$ dirigé vers la droite.

2- Source - Puits centrés à l'origine:

$f(z) = \dfrac{D}{2\pi} Log\, z$ où D est une constante réelle.

On pose $z = r\, e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad f(z) = \dfrac{D}{2\pi} Log\left(r\, e^{i\theta}\right) = \dfrac{D}{2\pi} Log\, r + \dfrac{D}{2\pi} i\,\theta$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} \varphi = \dfrac{D}{2\pi} Log\, r \\ \psi = \dfrac{D}{2\pi}\theta \end{cases}$$

$\varphi = Cte \quad \Leftrightarrow \quad r = Cte \quad \Rightarrow$ Cercles

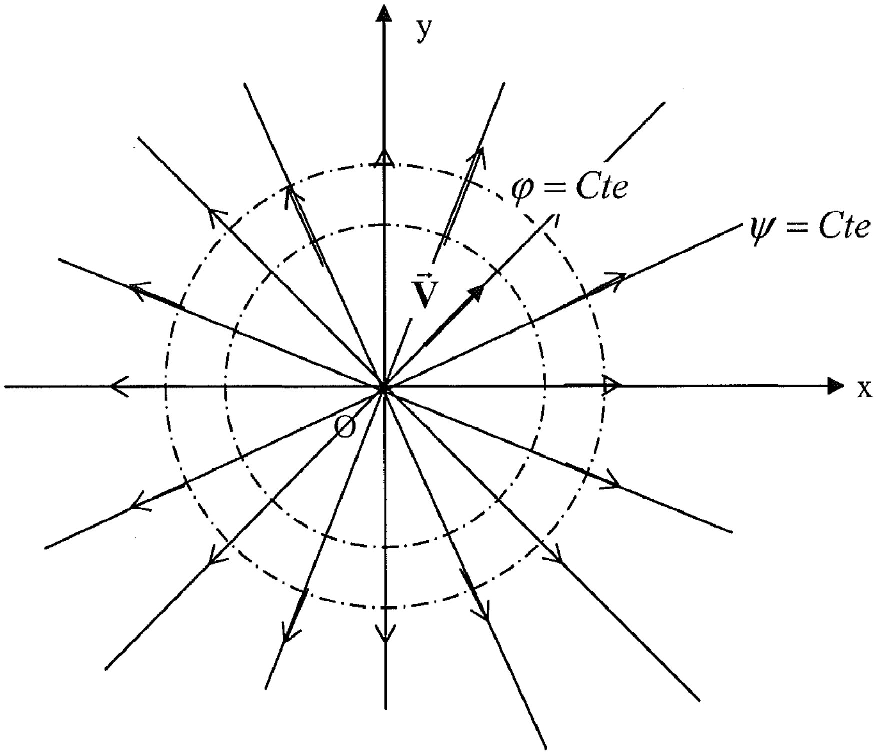
$\psi = Cte \quad \Leftrightarrow \quad \theta = Cte \quad \Rightarrow$ Droites issues de O

$$\mathbf{w} = \frac{df}{dz} = \frac{D}{2\pi}\frac{1}{z} = \frac{D}{2\pi}\frac{1}{r\, e^{i\theta}} = \frac{D}{2\pi r} e^{-i\theta} = \frac{D}{2\pi r}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)$$

$$\mathbf{w} = u - iv \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = \dfrac{D}{2\pi r}\cos\theta \\ v = \dfrac{D}{2\pi r}\sin\theta \end{cases}$$

Or $\mathbf{w} = \mathbf{V}\, e^{-i\theta}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \mathbf{V} = \dfrac{D}{2\pi r} \\ et \\ \omega = \theta \end{cases}$

La quantité $2\pi r\,\mathbf{V}$ représente le débit volumique par unité de longueur du fluide noté D.
Si $D > 0$ il s'agit d'une source
Si $D < 0$ il s'agit d'un puits

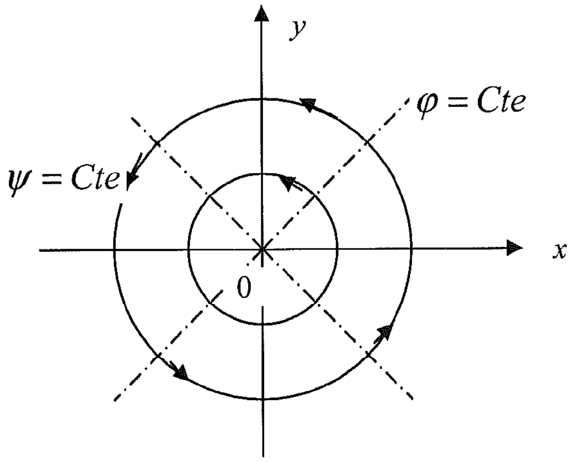


3- <u>Ecoulement autour d'un tourbillon placé à l'origine</u>:

$f(z) = i\, C\, Log\, z$ où C est une constante réelle.

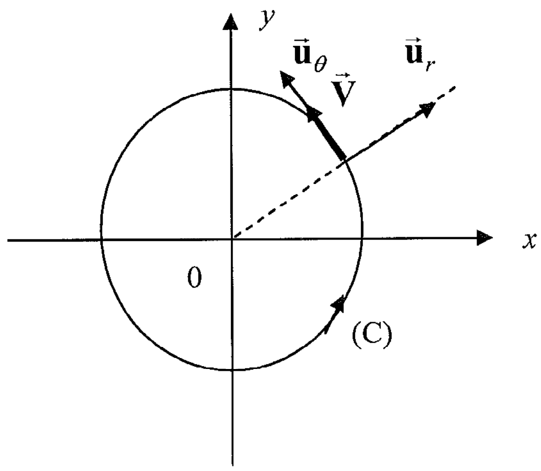
$$f(z) = i\, C\, Log\left(r\, e^{i\theta}\right) = i\, C\, Log\, r - C\,\theta \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varphi = -C\,\theta \\ \psi = C\, Log\, r \end{cases}$$

$\varphi = Cte \quad \Leftrightarrow \quad \theta = Cte \quad \Rightarrow$ Droites issues de O
$\psi = Cte \quad \Leftrightarrow \quad r = Cte \quad \Rightarrow$ Cercles



En utilisant les coordonnées polaires, la relation vectorielle $\vec{\mathbf{V}} = \overrightarrow{grad}\,\varphi$ s'écrit

$$\begin{cases} \mathbf{V}_r = \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \\ \mathbf{V}_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\dfrac{C}{r} \end{cases}$$



Pour un contour fermé faisant une fois le tour de l'origine, la circulation du vecteur vitesse est

$$\Gamma = \int_{(C)} \vec{\mathbf{V}} \,.\, \overrightarrow{dl} = \int_0^{2\pi} \mathbf{V}_\theta \, r \, d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{C}{r} r \, d\theta$$

Par conséquent: $\Gamma = -2\pi C$

C étant constante, la circulation est la même le long de tout cercle de centre *0* et même pour toute courbe fermée entourant une fois le point 0.
Le module de la vitesse s'écrit

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Le champ de vitesse d'un tourbillon est donc défini, pour $r \neq 0$, par une loi de décroissance hyperbolique.
Ainsi l'écoulement autour d'un tourbillon est représenté par la fonction

$$f(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi} Log\, z$$

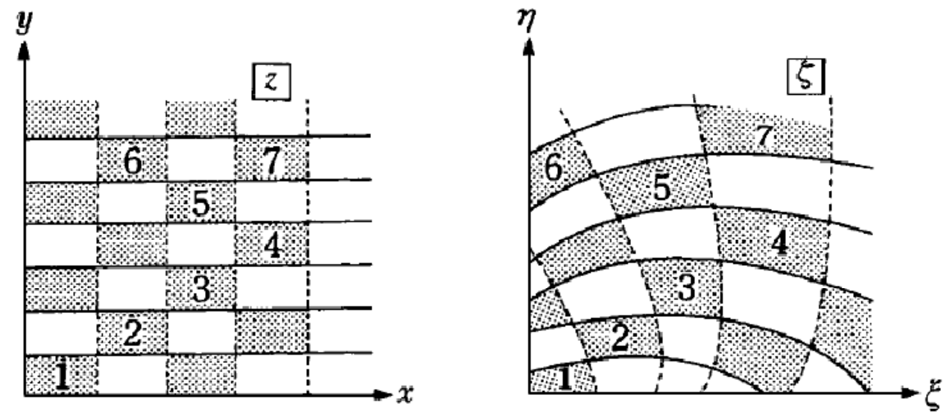
7- Transformation conforme

Un écoulement simple peut être étudié facilement dans le plan z. Cependant, Pour un écoulement complexe ceci devient très difficile mais, on peut étendre les possibilités de résolution de l'équation de Laplace, par exemple, en transformant l'écoulement autour d'un cylindre sur un autre plan pour obtenir des écoulement complexes tels que le écoulement autour d'un aile, entre les pales d'une pompe ou d'un ventilateur.

Supposons qu'il existe une relation entre deux variables complexes $z = x + iy$ et $\xi = \varepsilon + i\eta$, et que ξ est la fonction régulière de z.

$$\xi = f(z)$$

Considérons un maillage composé de x = constant et y = constante sur le plan z comme le montre la Figure ci dessous. Ce maillage se transforme en un autre maillage composé de ε= constant et η = constant sur le plan ξ. En d'autres termes, le motif sur le plan z est différent du motif sur le ξ mais ils sont liés entre eux.



7.1- Transformation de Joukouski

Il s'agit de la transformation particulière défini par :

$$\xi = f(z)$$

tel que :

$$\zeta = \varepsilon + i\eta = (z + \frac{a^2}{z})$$

avec

$$\varepsilon = (r + \frac{a^2}{r})\cos\theta$$

$$\eta = (r - \frac{a^2}{r})\sin\theta$$

a est nombre réel avec z= x + i y ; z = r e^{θ} ; x= r sinθ ; y = r cosθ

Cette permet de trouver la forme des lignes de courant autour d'un obstacle ayant la des ailes avions et de connaitre ainsi la répartition des vitesses autour de l'aile. Les résultats théoriques ainsi obtenu concordent parfaitement avec l'expérience.

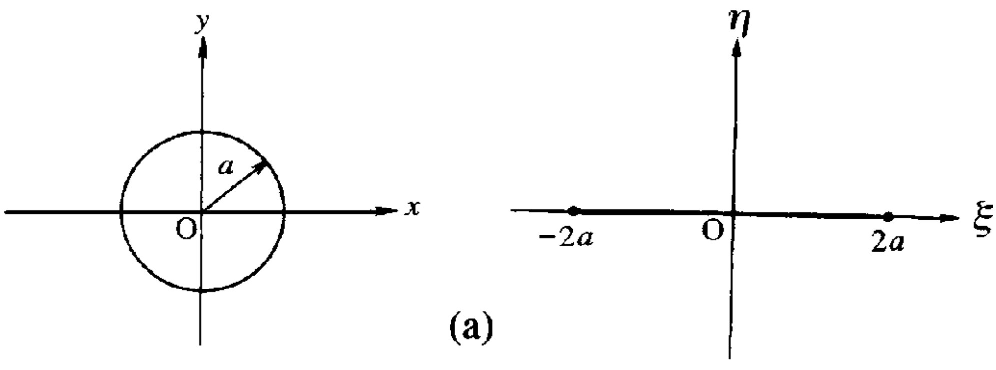
7.2- Quelques applications

- <u>Cercle de rayon R= a et d'équation $x^2+y^2= R^2$</u>

Pour chaque couple (x,y) $\longrightarrow$ (ε, η)

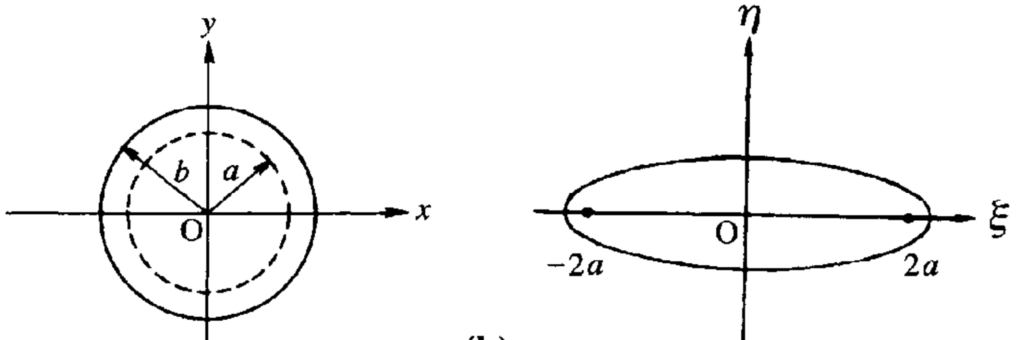
D'après les équations de la transformation on a (-a,0) $\longrightarrow$ (η=0 et ε= -a(1+a^2/$(-a)^2$+0) qui correspond a (-2a, 0). De la manière à partir du couple (a,0) on obtient (2a,0).

La transformée d'un cercle de rayon a dans le plan (x, y) est un segment de droite de longueur 4a dans le plan (ε, η).

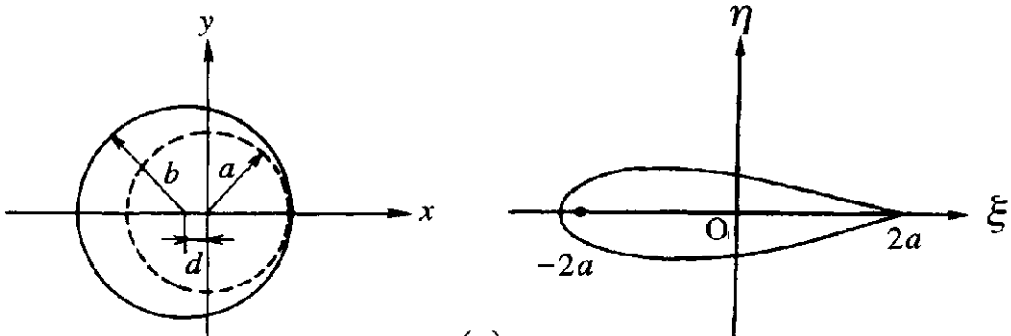


(a)

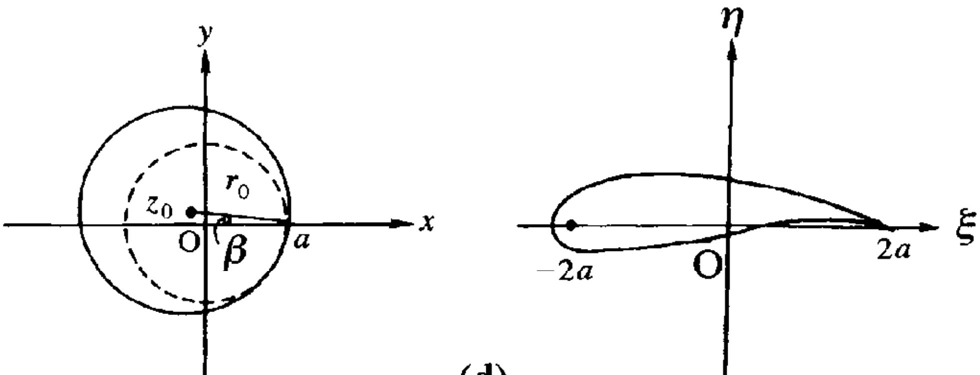
- On procède de la même manière pour transformer le cercle de rayon R et dont le centre se trouve au point z_0 en un profil aérodynamique.



(b)



(c)



(d)