

## Chapitre IV

### Comportement viscoélastique

#### 4.1 Introduction

Lorsque sollicités, certains matériaux ont une réponse instantanée. C'est le cas des céramiques et des matériaux métalliques dans le domaine élastique. On parle alors de matériaux élastiques.

Le comportement de nombreux matériaux subissant des « petites » déformations sont raisonnablement bien décrits par une relation linéaire élastique entre les contraintes-déformations.

$$\sigma(t) = E\epsilon(t), \quad \epsilon(t) = J\sigma(t), \quad J \stackrel{\text{def}}{=} 1/E \quad (4.1)$$

Où E est le module de Young, J est la complaisance élastique et t le temps. Cependant, pour un matériau élastique, la déformation et la contrainte sont indépendants du temps, indépendants de la vitesse.

Cependant, le comportement **liquide visqueux linéaire** obéit à la loi d'équation constitutive :

$$\sigma(t) = \eta\dot{\epsilon}(t) \quad (4.2)$$

Où  $\eta$  est la viscosité (habituellement définie en cisaillement, mais ici on l'a défini en traction) et pour les fluides la contrainte est linéaire avec le taux de déformation.



*Figure 4.1 – Simulation d'un comportement visqueux*

Certains matériaux comme les polymères ou les tissus organiques ont des réponses différées. On peut parler de comportement **viscoélastique**.

En réalité les équations constitutives pour la plupart des matériaux solides diffèrent du comportement élastique linéaire :

- Lorsque le matériau a un comportement à la fois **élastique et visqueux** : on parle alors de **viscoélasticité**.
- Lorsqu'une structure élastique est déformée, la déformation de charge/décharge est **instantanée et réversible**. Lorsque la charge est retirée, on retrouve l'état initial instantanément et sans déformation permanente.

Les structures **viscoélastiques** ne permettent pas une telle réponse.

## 4.2 Viscoélasticité

La **viscoélasticité** est la propriété de matériaux qui présentent des caractéristiques à la fois **visqueuses** et **élastiques**, lorsqu'ils subissent une déformation.

Les matériaux visqueux, résistent à un écoulement en cisaillement et présentent une déformation qui augmente linéairement avec le temps lorsqu'une contrainte est appliquée.

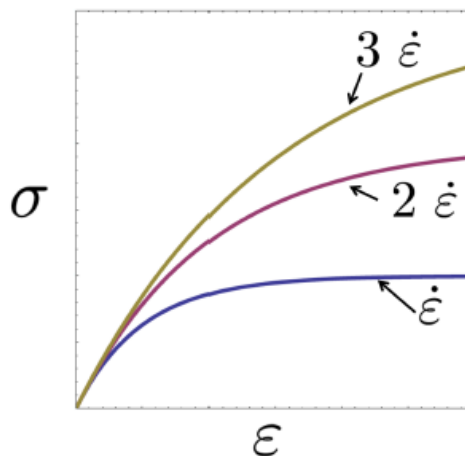
Les matériaux élastiques se déforment lorsqu'ils sont contraints, et retournent rapidement à leur état d'origine une fois la contrainte retirée.

En rhéologie, le comportement d'un matériau viscoélastique linéaire est ainsi intermédiaire entre celui d'un **solide élastique** idéal symbolisé par un ressort de module  $E$  (ou  $G$ ) et celui d'un liquide visqueux **newtonien** symbolisé par un amortisseur de viscosité.

L'élasticité d'un matériau traduit sa capacité à conserver et restituer de l'énergie après déformation. La viscosité d'un matériau traduit sa capacité à dissiper de l'énergie. Les polymères, en fait la plupart des matériaux, ont un comportement viscoélastique.

### 4.2.1 Comportement viscoélastique

Un matériau viscoélastique se caractérise par un comportement mécanique qui dépend du temps. Lors d'un essai de traction par exemple, la réponse du matériau va dépendre de la vitesse de déformation (Figure 1.7).



**Figure 4.2-** Schématisation de la courbe contrainte/déformation pour un matériau viscoélastique linéaire.

En Comportement viscoélastique linéaire, la réponse est dépendante du temps :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{\eta} \sigma(t) \quad \text{ou} \quad \sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon}(t) \quad (4.3)$$

## 4.2.2 Relaxation et fluage

Il y'a deux tests standards pour observer le comportement viscoélastique linéaire :

- Test de relaxation des contraintes
- Test de fluage

Lorsque l'on applique une déformation et que l'on mesure l'évolution de la contrainte en fonction du temps, on parle de **relaxation**. Lorsque l'on applique une contrainte et que l'on mesure l'évolution de la déformation, on parle de **fluage** (Fig.4.3).

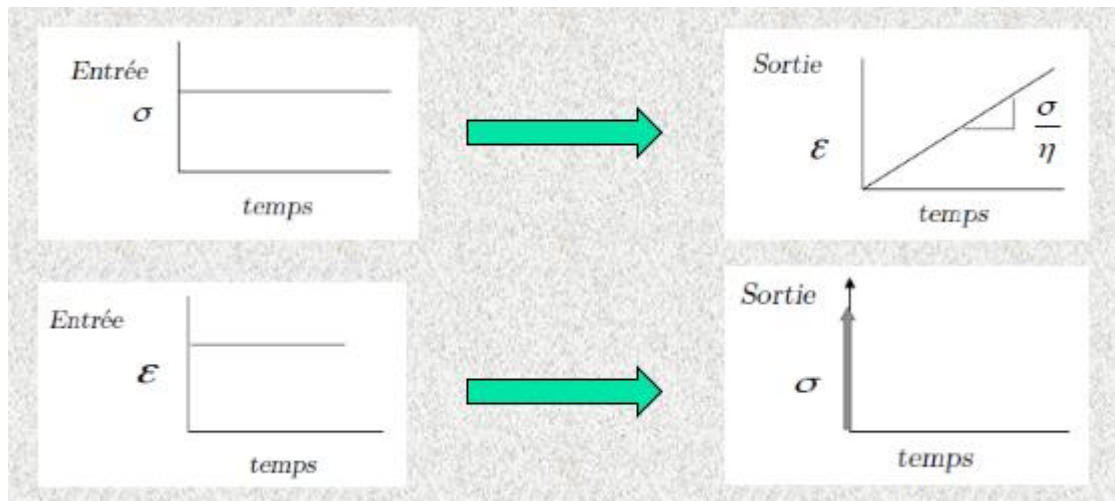


Figure 4.3- Comportement viscoélastique linéaire.

## 4.3 Essais fondamentaux

Lorsque l'on s'intéresse à l'identification d'une loi de comportement viscoélastique d'un matériau, plusieurs possibilités s'offrent à l'expérimentateur.

Les expériences « duales » de fluage et de relaxation peuvent être réalisées, suivies des expériences de recouvrance et d'effacement. Ces deux expériences sont fondamentales pour mettre en évidence le comportement différé d'un matériau. Le chargement appliqué est bien sûr inférieur à la charge à rupture.

### 4.3.1 Essai de fluage et de relaxation

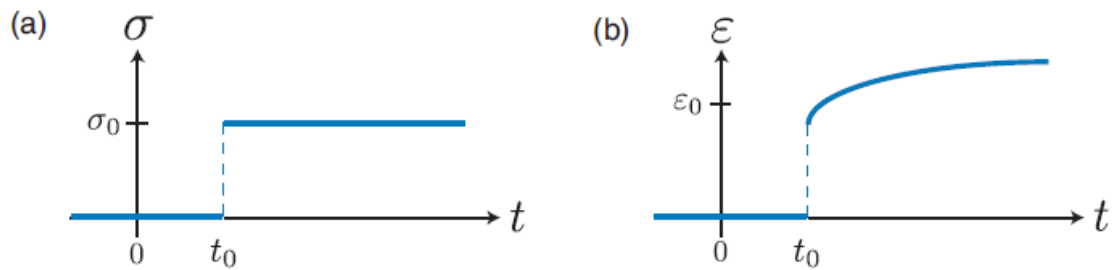
L'essai de **fluage** consiste à appliquer à partir de l'instant  $t = t_0$  un échelon de contrainte d'amplitude  $\sigma_0$ . L'évolution de la déformation est observée en fonction du temps (Fig.4.4) :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t_0, t; \sigma_0) \quad (4.4)$$

où

$$J(t_0, t; \sigma_0) \begin{cases} = 0 \text{ pour } t < t_0 \\ \text{présente un saut positif pour } t = t_0 \\ \text{est croissante avec } t \text{ pour } t > t_0 \end{cases}$$

La fonction  $J(t_0, t; \sigma_0)$  est la fonction de **fluage** correspondante. Pour  $t = t_0$  un saut correspondant à l'élasticité instantanée du matériau est observée.



**Figure 4.4** – Expériences fondamentales de fluage  
(Echelon de contrainte imposé (a) et réponse en déformation (b))

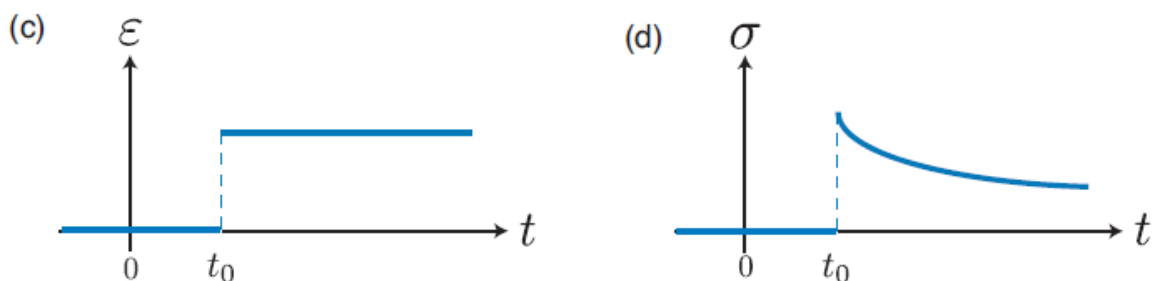
L'essai de **relaxation** consiste à appliquer à partir de  $t = t_0$  un échelon de déformation d'amplitude  $\epsilon_0$ . L'évolution de la contrainte est observée en fonction du temps :

$$\sigma(t) = \epsilon_0 R(t_0, t; \epsilon_0) \tag{4.5}$$

où

$$R(t_0, t; \epsilon_0) \begin{cases} = 0 \text{ pour } t < t_0 \\ \text{présente un saut positif pour } t = t_0 \\ \text{est décroissante avec } t \text{ pour } t > t_0 \end{cases}$$

La fonction  $R(t_0, t; \epsilon_0)$  est la fonction de relaxation correspondante. De même pour  $t = t_0$  un saut correspondant à l'élasticité instantanée du matériau est observé.



**Figure 4.5** – Expérience fondamentale de relaxation  
(Echelon de déformation imposé (c) et réponse en contrainte (d))

### 4.3.2 Expériences de recouvrance et d'effacement

Les essais de fluage et de relaxation peuvent être poursuivis par l'enlèvement de la sollicitation imposée. L'expérience de **recouvrance** résulte de l'application d'un créneau de contrainte d'amplitude  $\sigma_0$  entre les instants  $t_0$  et  $t_1$ .

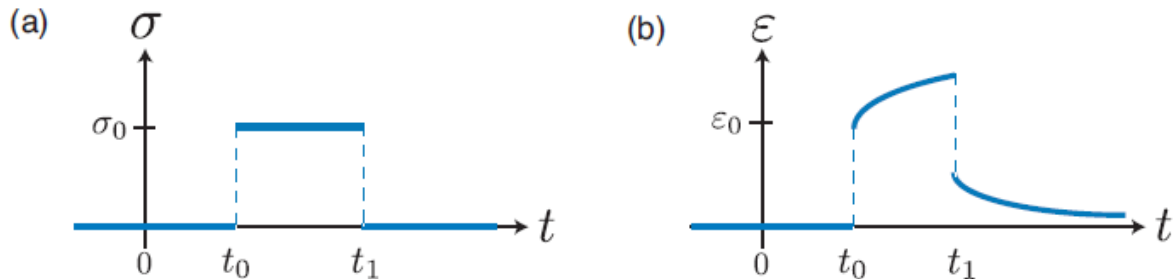


Figure 4.6 – Expérience fondamentale de recouvrance  
(Créneau de contrainte imposé (a) et réponse en déformation (b))

Pour  $t < t_1$ , le fluage observé est similaire à la figure 4.4. Pour  $t = t_1$ , un retour élastique instantané est observé identique à celui réalisé pour  $t = t_0$ . Le phénomène de recouvrance a lieu pour  $t > t_1$ . Il peut être total lorsque la déformation revient à sa valeur précédant l'instant  $t_0$  ou partiel lorsqu'une déformation résiduelle demeure (Fig.4.6).

L'expérience d'**effacement** résulte de l'application d'un créneau de déformation  $\varepsilon_0$  entre les instants  $t_0$  et  $t_1$ .

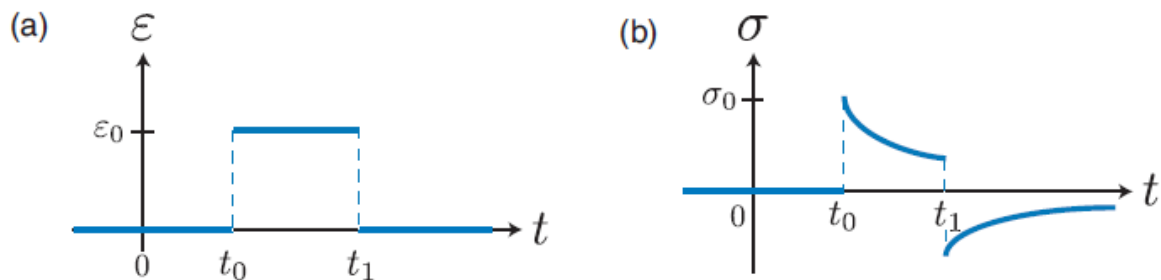


Figure 4.7 – Expérience fondamentale d'effacement  
(Créneau de déformation imposé (a) et réponse en contrainte (b))

Pour  $t < t_1$ , la relaxation observée est similaire à la figure 4.5. Pour  $t = t_1$ , un retour élastique instantané identique à celui réalisé pour  $t = t_0$ .

Le phénomène d'effacement a lieu pour  $t > t_1$  et peut aussi être total ou partiel (Fig.4.7).

## 4.4 Modélisations rhéologiques du comportement viscoélastique

L'usage de modèles rhéologiques permet de représenter les comportements instantanés et différés en combinant des éléments élastiques (ressorts) et visqueux (amortisseurs) (Fig.4.8).



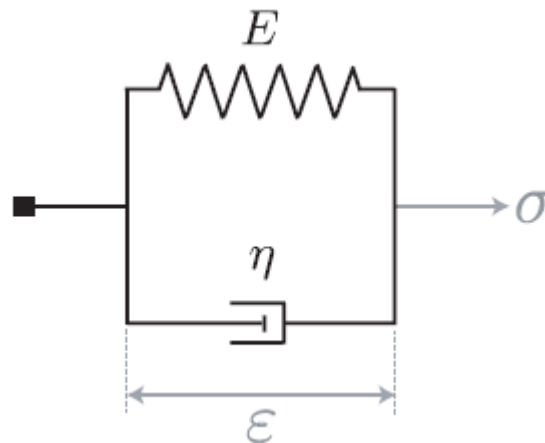
**Figure 4.8** – Ressort de rigidité (*gauche*) et amortisseur de viscosité (*droite*)

Les modèles les plus couramment utilisés pour décrire le comportement viscoélastique sont présentés ci-après.

#### 4.4.1 Modèles à un temps caractéristique

##### *Modèle de Kelvin-Voigt*

Le modèle de Kelvin-Voigt associe en parallèle un ressort de rigidité  $E$  et un amortisseur de viscosité  $\eta$  pour représenter le comportement viscoélastique. Les puissances réversible et dissipée sont définies en séparant la contrainte en une composante réversible (élastique) et une composante irréversible (anélastique).



**Figure 4.9** – Illustration d'un modèle rhéologique de Kelvin-Voigt

L'évolution de la complaisance avec le temps est décrite par la relation :

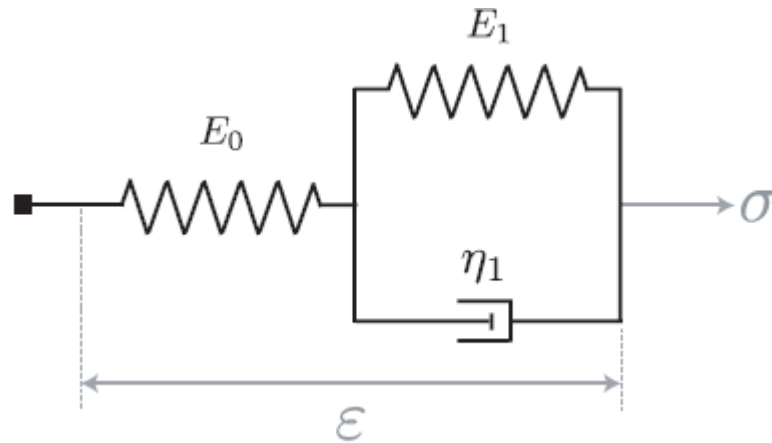
$$J(t) = J \left( 1 - e^{-t/\tau} \right) \quad (4.6)$$

où

$$\tau = \eta/E \quad (4.7)$$

$\tau$  est le temps caractéristique [s] et  $J = 1/E$  la complaisance [ $\text{Pa}^{-1}$ ].

L'ajout d'un amortisseur en série à un modèle de Kelvin-Voigt permet de représenter le comportement instantané et est appelé modèle rhéologique de Poynting-Thomson (Fig. 4.10).



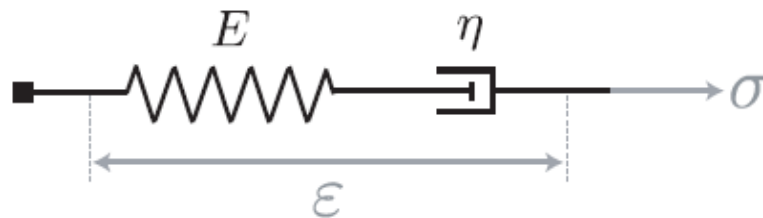
**Figure 4.10** – Illustration d'un modèle rhéologique de Poynting-Thomson

L'évolution de la complaisance est alors décrite de façon analogue avec l'ajout d'un terme instantané :

$$J(t) = J_0 + J_1 (1 - e^{-t/\tau}) \quad (4.8)$$

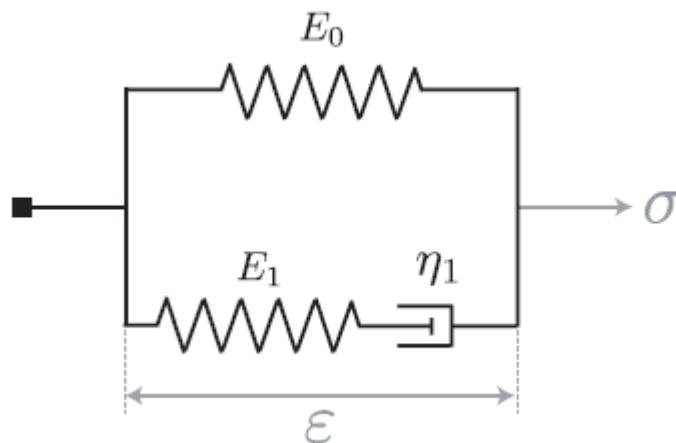
### Modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell associe en série un ressort de rigidité  $E$  et un amortisseur de viscosité  $\eta$  pour représenter le comportement viscoélastique (Fig. 4.11).



**Figure 4.11** – Illustration d'un modèle de Maxwell

L'ajout d'un amortisseur en parallèle à un modèle de Maxwell permet de représenter le comportement instantané et est appelé modèle rhéologique de Zener (Fig. 4.12)



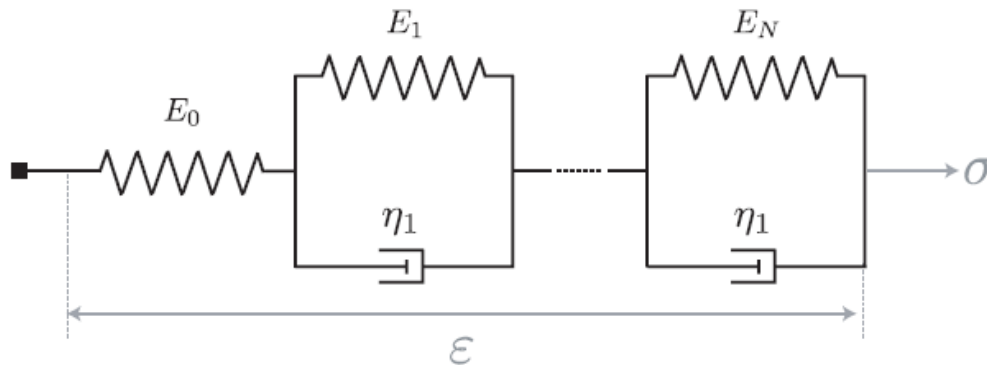
**Figure 4.12** – Illustration d'un modèle de Zener

#### 4.4.2 Modèle à plusieurs temps caractéristiques

Les modèles généralisés permettent de représenter des comportements viscoélastiques complexes mais il est alors nécessaire de déterminer autant de paramètres que d'éléments introduits.

##### *Modèle de Kelvin-Voigt généralisé*

Le modèle de Kelvin-Voigt généralisé est constitué de l'association en série de  $N$  modèles de Kelvin-Voigt (Fig. 4.13).



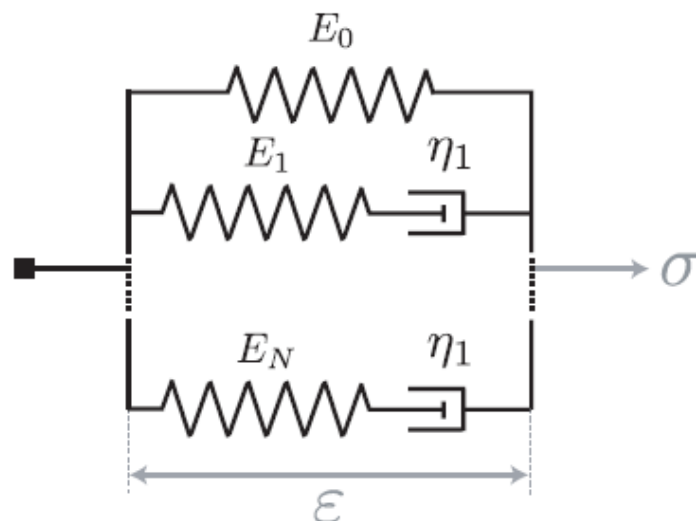
**Figure 4.13** – Illustration du modèle de Kelvin-Voigt généralisé

La complaisance d'un tel modèle est alors la somme des termes du modèle constitutif :

$$J(t) = J_0 + \sum_{i=1}^N J_i (1 - e^{-t/\tau_i}) \quad (4.9)$$

##### *Modèle de Maxwell généralisé*

De façon analogue, le modèle de Maxwell généralisé est constitué de l'association en parallèle de  $N$  modèles de Maxwell (Fig. 4.14).



**Figure 4.14** – Illustration du modèle de Maxwell généralisé



**Références bibliographiques**

- Z. Harichane, Cours de Magister « Rhéologie des sols », Université Haasiba Benbouali, Chelf, Algérie, 2010.
- C. Montero. Caractérisation du comportement viscoélastique asymptotique du bois. Mécanique [physics.med-ph]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2010.
- D. Jaloča. Modélisation du comportement viscoélastique d'un élastomère fortement chargé sous sollicitations multiaxiales. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Doctorale de l'Ecole Polytechnique, 2015.