Chapitre 1

Tribus et mesures

1.1 Rappels sur la théorie des ensembles.

1.1.1 Opérations sur les ensembles

On rappelle ici quelques notations sur les ensembles. Si E est un ensemble et A est un sous-ensemble de E alors on note $A \subseteq E$. Cela signifie que tout élément de A est dans E . Si $A \subset E$ alors le complémentaire de A (dans E) est noté par:

$$A^c = \{x \in E,\ x \notin A\}.$$

A^c est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A .

Si $A, B \subseteq E$ alors la réunion de A et B , notée $A \cup B$ est l'ensemble :

$$A \cup B = \{x \in E,\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-ensembles de E indexé par I quelconque, on note :

$$\cup_{i \in I} A_i = \{x \in E,\ \text{il existe } i \in I \text{ tel que } x \in A_i\ \}.$$

$\cup_{i \in I} A_i$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à au moins un des A_i .

Si $A, B \subseteq E$ alors l'intersection de A et B , notée $A \cap B$ est l'ensemble :

$$A \cap B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-ensembles de E indexé par I quelconque, on note :

$$\cap_{i \in I} A_i = \{x \in E,\ \text{pour tout } i \in I \text{ tel que } x \in A_i\ \}.$$

$\cap_{i \in I} A_i$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à tous les A_i .

Si $A, B \subseteq E$ alors la la différence ensembliste de A et B , notée $A \backslash B$ (lire « A moins B ») est l'ensemble :

$$A \backslash B = \{x \in E,\ x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap B^c = A \backslash (A \cap B).$$

Si $A, B \subseteq E$ alors la différence symétrique de A et B , notée $A \triangle B$ (lire « A delta B ») est l'ensemble :

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

On rappelle les lois de Morgan :

Proposition 1.1.1 . *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E indexé par I quelconque alors:*

$$(\cup_{i \in I} A_i)^c = \cap_{i \in I} (A_i)^c \qquad et \qquad (\cap_{i \in I} A_i)^c = \cup_{i \in I} (A_i)^c.$$

1.1.2 Images directes et images réciproques

Dans cette sous-section, on suppose que $f : X \to Y$ est une fonction entre deux ensembles quelconques X et Y . Si A est un sous-ensemble de X , l'image directe de A par F est définie par:

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\}.$$

Si B est un sous-ensemble de Y , alors l'image réciproque de B par f est définie par:

$$f^{-1}(B) = \{x,\ f(x) \in B\}.$$

Proposition 1.1.2 *Si $f : X \to Y$ est une fonction entre deux ensembles quelconques. Si $(B_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-ensembles de Y alors:*

$$f^{-1}\left(\cup_{i\in I}B_i\right) = \cup_{i\in I}f^{-1}\left(B_i\right) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\cap_{i\in I}B_i\right) = \cap_{i\in I}f^{-1}\left(B_i\right)$$

De plus si B est un sous ensemble de Y alors:

$$f^{-1}\left(B^c\right) = f^{-1}\left(B\right)^c$$

Preuve. - Soit $x \in X$. Alors $x \in f^{-1}\left(\cup_{i\in I}B_i\right)$ si et seulement si $f(x) \in \cup_{i\in I}B_i$ si et seulement s'il existe $i \in I$ tel que $f(x) \in B_i$ si et seulement s'il existe $i \in I$ tel que $x \in f^{-1}(B_i)$ si et seulement si $x \in \cup_{i\in I}f^{-1}(B_i)$.

- Soit $x \in X$. Alors $x \in f^{-1}\left(\cap_{i\in I}B_i\right)$ si et seulement si $f(x) \in \cap_{i\in I}B_i$ si et seulement si pour tout $i \in I$ tel que $f(x) \in B_i$ si et seulement si pour tout $i \in I$ tel que $x \in f^{-1}(B_i)$ si et seulement si $x \in \cap_{i\in I}f^{-1}(B_i)$. ■

Proposition 1.1.3 *Si $f : X \to Y$ est une fonction entre deux ensembles quelconques. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-ensembles de X alors:*

$$f\left(\cup_{i\in I}A_i\right) = \cup_{i\in I}f\left(A_i\right) \quad \text{et} \quad f\left(\cap_{i\in I}A_i\right) \subset \cap_{i\in I}f\left(A_i\right)$$

Preuve. Soit $y \in Y$. Alors $y \in f\left(\cup_{i\in I}A_i\right)$ si et seulement s'il existe $x \in \cup_{i\in I}A_i$ tels que $y = f(x)$ si et seulement s'il existe $i \in I$ et $x \in A_i$ tels que $y = f(x)$ si et seulement s'il existe $i \in I$ tel que $y \in f(A_i)$ si et seulement si $y \in \cup_{i\in I}f(A_i)$.

Supposons que $y \in f\left(\cap_{i\in I}A_i\right)$ alors il existe $x \in \cap_{i\in I}A_i$ tel que $y = f(x)$ et donc il existe $x \in X$ tels que pour tout $i \in I$, $x \in A_i$ et $y = f(x)$. En particulier, pour tout $i \in I$, il existe $x_i \in A_i$ tel que $y = f(x_i)$.

D'ou pour tout $i \in I$, $y \in f(A_i)$ et donc $y \in \cap_{i\in I}f(A_i)$. ■

Dans la dernière formule, il n'y a qu'une inclusion et pas forcément une égalité comme le montre le contre-exemple suivant :

Contre-exemple 1. Considérons la fonction $f : x \to x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $A = [-1, 0]$ et $B = [0, 1]$ .Alors d'une part, $f(A) = [0, 1] = f(B)$ donc $f(A) \cap f(B) = [0, 1]$. D'autre part, on a $A \cap B = \{0\}$ et donc $f(A \cap B) = f\{0\} = \{0\}$

D'où $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

1.1.3 Dénombrabilité:

On rappelle quelques éléments de théorie des cardinaux.

Définition 1.1.1 *On dit qu'un ensemble X est dénombrable s'il existe une injection de X vers l'ensemble des entiers naturels.*

Quand un ensemble X est dénombrable, on peut énumérer ses éléments. Autrement dit on pourra toujours l'écrire sous la forme

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \text{ pour un certain } n \text{ si } X \text{ est fini, } \; X = \{x_n / \; n \in \mathbb{N}\} \text{ si } X \text{ est infini.}$$

Remarque 1.1.1 *1) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables mais $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

2) L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
3) Tout ensemle fini est dénombrable.
4) Toute partie d'un ensemle dénombrable est dénombrable.
5) Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
6) Tout produit d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

1.1.4 Limites d'ensembles

Définition 1.1.2 *Soit X un ensemble non-vide et $(A_i)_{i\in I}$ une suite de parties de X, on définit la limite supérieure et inférieure de la suite $(A_i)_{i\in I}$ par*

$$\begin{aligned} \overline{\lim}\; A_n &= \limsup_n A_n := \cap_{n\geq 1} \cup_{k\geq n} A_n = \cap_{n=1}^{+\infty} \cup_{k=n}^{+\infty} A_n. \\ \underline{\lim} A_n &= \liminf_n A_n := \cup_{n\geq 1} \cap_{k\geq n} A_n = \cup_{n=1}^{+\infty} \cap_{k=n}^{+\infty} A_n. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.2 *- La notation* $\inf\sup$ *et* $\sup\inf$ *est à prendre au sens de la relation d'ordre partiel sur les parties de X.*

- Noter que $\overline{\lim}\; A_n \subset \underline{\lim} A_n$.

Proposition 1.1.4 *[18, Page 5](Suite convergente d'ensembles)*

1) Si $(A_n)_n$ est croissante $(A_n \subset A_{n+1})$, $\forall n \geq 1$, alors

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

2) 1) Si $(A_n)_n$ est décroissante $(A_{n+1} \subset A_n)$, $\forall n \geq 1$, alors

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \cap_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Dans les deux cas on dira que la suite $(A_n)_n$ est convergente.

Pour les suites réelles, si $(a_n)_n$ est une suite dans $\mathbb{R}$, on définit

$$\begin{aligned} \lim_n \sup a_n &= \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} a_k. \\ \lim_n \inf a_n &= \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} a_k. \end{aligned}$$

Ces deux nombres existent toujours dans $\mathbb{R} = [-\infty, +\infty]$.

De même si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions d'un ensemble X dans $\mathbb{R}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$, on définit $\lim_n \sup f_n$ et $\lim_n \inf f_n$ comme fonctions de X dans $\overline{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned} \left(\lim_n \sup f_n\right)(x) &= \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} f_k(x). \\ \left(\lim_n \inf f_n\right)(x) &= \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} f_k(x). \end{aligned}$$