

Chapitre 0

Préliminaires

Les préliminaires proposés ici ne sont pas des cours complets. Il s'agit plutôt de recontextualiser quelques outils et notions afin d'aborder la théorie de la mesure sereinement. Des définitions seront omises et les propositions ne seront pas forcément démontrées.

Dans la suite, on notera $\overline{\mathbb{R}}$ la droite numérique achevée. C'est à dire $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ muni de la relation inférieure ou égale. Dans $\overline{\mathbb{R}}$, tout sous-ensemble non-vide admet un sup et inf. Ceci a l'intérêt de simplifier les énoncés et démonstrations en théorie de la mesure.

On notera également que l'on peut étendre l'addition à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en posant $a + \infty = \infty = \infty + a$ pour tout $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Dans la suite on notera $\infty = +\infty$.

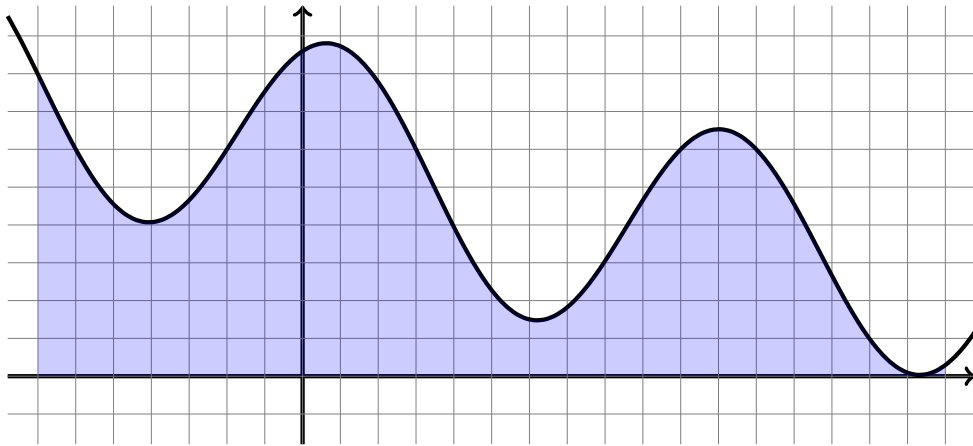
1.1 Comparaison intégrale de Riemann vs. intégrale de Lebesgue

Dans ce cours, le but est de construire l'intégrale de Lebesgue. Mais avant de construire cette intégrale nous devons passer par 3 chapitres assez théoriques. Dans cette introduction on se propose de comparer l'intégrale de Riemann avec l'intégrale de Lebesgue dans le cas des fonctions réelles.

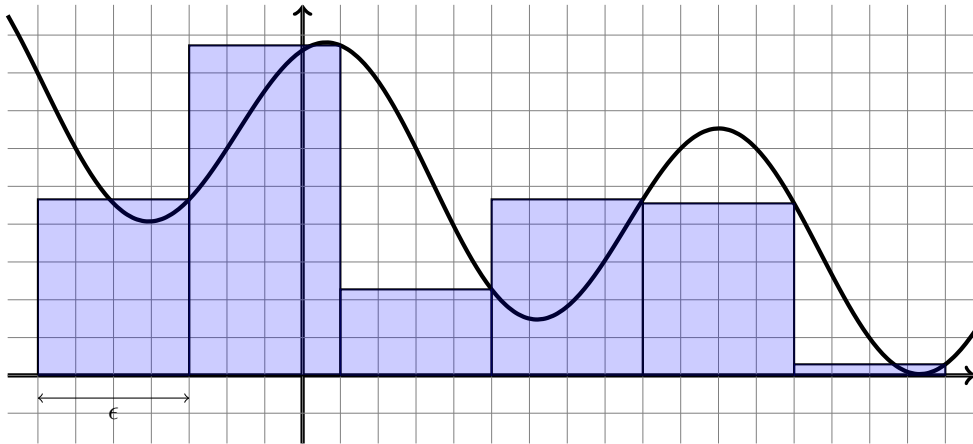
1.1.1 Intégrale de Riemann

Considérons $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour calculer son intégrale de Riemann, on divise $[a, b]$ en petits intervalles de longueur ϵ . On approxime alors l'intégrale de f à la somme des aires des rectangles au-dessus de ces intervalles dont la hauteur est déterminée par une valeur de f sur cet intervalle. Plus ϵ est petit, plus l'aire calculée sera proche de l'intégrale.

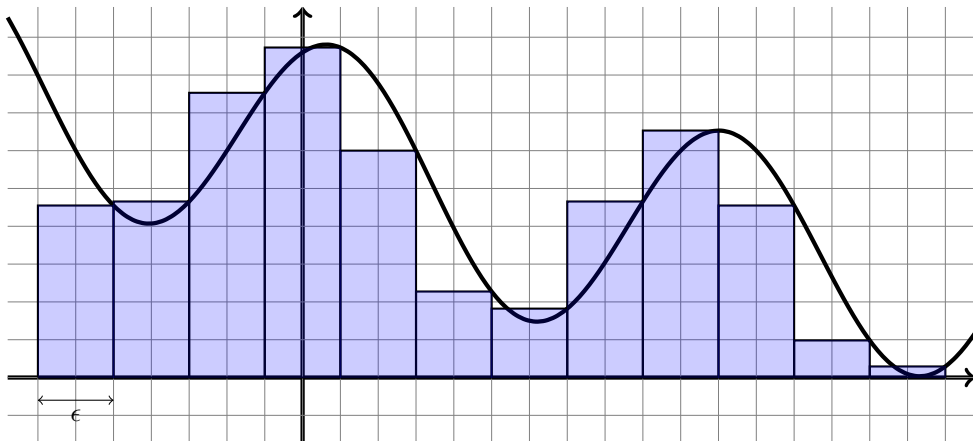
Exemple 1. On trace ici une fonction f entre $a = -7$ et $b = 17$ et l'on cherche à déterminer l'aire sous la courbe en bleu dans le dessin ci-dessous :



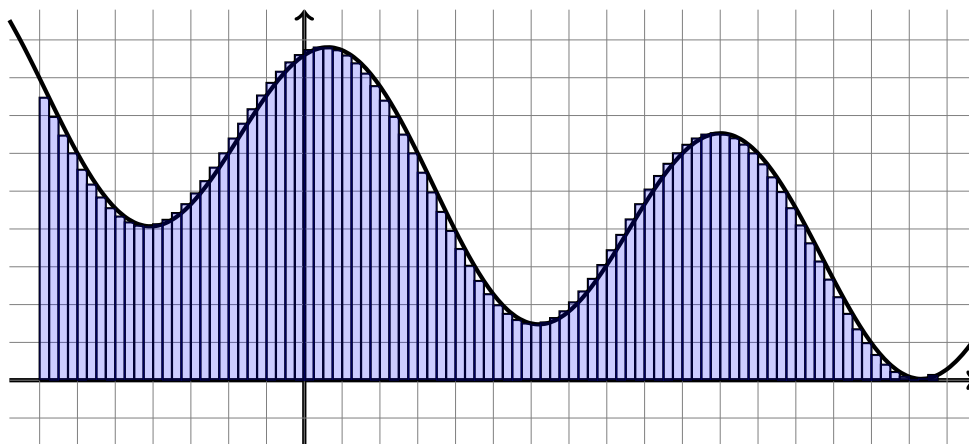
Une bonne approximation pour cette aire (et c'est l'idée de la construction de l'intégrale de Riemann) s'obtient en découpant l'intervalle $[a, b]$ en différents intervalles de longueur ϵ et d'approximer l'aire par des rectangles de base ϵ . Ci-dessous $\epsilon = 4$.



Ensuite, en faisant baisser ϵ , on obtient une approximation de plus en plus précise de l'aire sous la courbe.



Quand ϵ est très petit, la somme des aires des rectangles est proche de l'aire sous la courbe.



Au final, l'intégrale de Riemann est obtenue en faisant tendre ϵ (la longueur des petits intervalles subdivisant $[a, b]$) vers 0. Il est à noter que la limite existe car f est continue (et ce n'est pas évident à montrer).

1.1.2 Intégrale de Lebesgue sur \mathbb{R}

On peut également tenter une autre approche, plutôt que subdiviser $[a, b]$, on peut subdiviser $Im(f)$ en petits intervalles $[a_0, a_1], \dots, [a_{n-1}, a_n]$, définir

$$E_k = \{x \in [a, b] \mid a_k \leq f(x) < a_{k+1}\}$$

et approximer l'intégrale de f de la façon suivante :

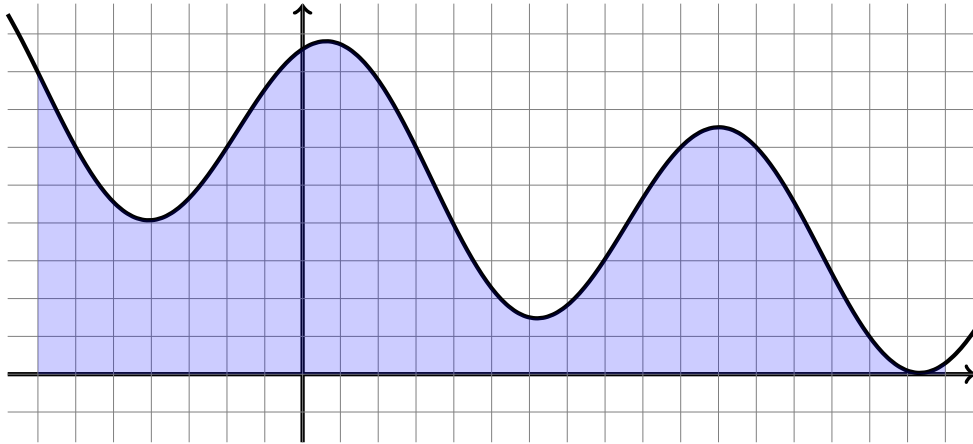
$$\int_a^b f \approx \sum_{k=0}^{n-1} a_k \times \text{"mesure de } E_k\text{"}.$$

Le problème de ce point de vue est que E_k n'est pas nécessairement un intervalle et donc il n'est pas évident de savoir ce que "mesure de E_k " vaut. Dans la suite, c'est la **mesure de Lebesgue** qui permettra d'associer une longueur à certaines (pas toutes) parties de \mathbb{R} .

L'intérêt de ce point de vue est qu'il suffit de pouvoir "mesurer" les ensembles de départ pour définir une intégrale. Autrement dit, on va pouvoir intégrer des fonctions dont l'ensemble de départ est un ensemble muni d'un moyen de mesurer des ensembles (c'est ce que l'on appellera un **espace mesuré**, voir Chapitre 4).

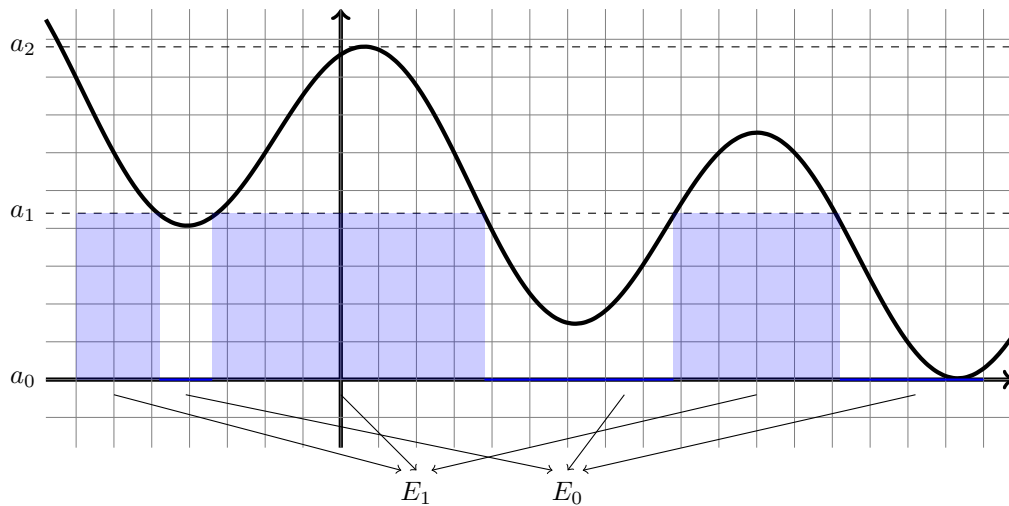
Malheureusement, il n'est pas toujours possible de mesurer tous les ensembles (voir Chapitre 8). C'est pour cela que l'on aura besoin d'introduire des **tribus** au Chapitre 2. Il va s'agir des familles d'ensembles dont on va pouvoir donner une mesure.

Exemple 2. Reprenons l'exemple précédent. On cherche toujours à calculer l'aire en bleu.

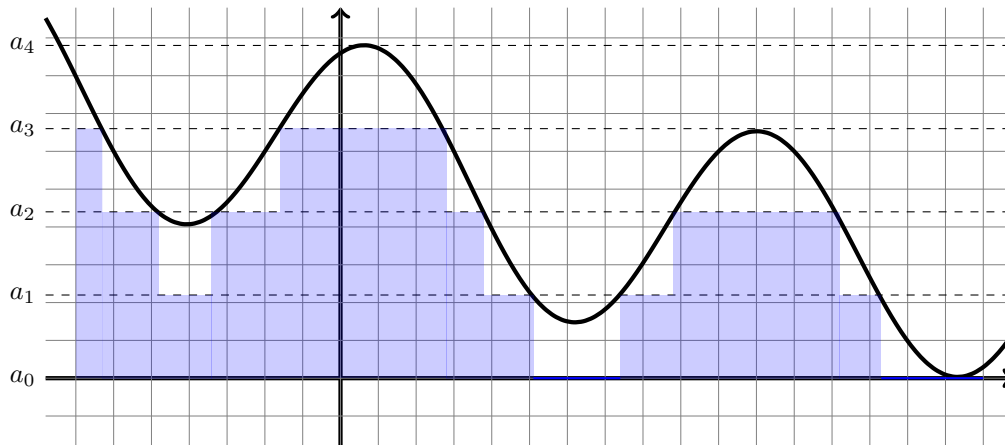


L'espace d'arrivée de f varie entre 0 et 8,8. On divise alors cet espace en n intervalles $[a_0, a_1], \dots, [a_{n-1}, a_n]$ de longueurs égales. Ensuite, on va chercher pour k entre 0 et $n - 1$ l'ensemble E_k des points x tels que $a_k \leq f(x) < a_{k+1}$. Finalement, il suffit de faire la somme des aires des rectangles obtenus en construisant au-dessus de chaque intervalle de E_k un rectangle de hauteur a_k .

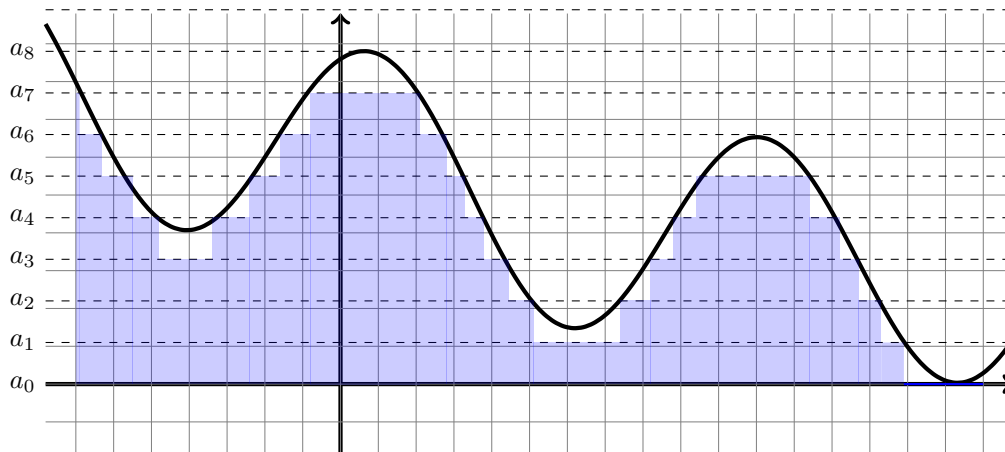
Ci-dessous on fait la construction pour $n = 2$.



Ci-dessous on fait la construction pour $n = 4$.



Ci-dessous on fait la construction pour $n = 8$.



Là encore, plus on subdivise finement plus on va arriver à une approximation correcte de l'intégrale de f . On notera que pour tout f continue l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue coïncident (voir Chapitre 5).

1.1.3 Discussion sur l'intérêt de l'intégrale de Lebesgue