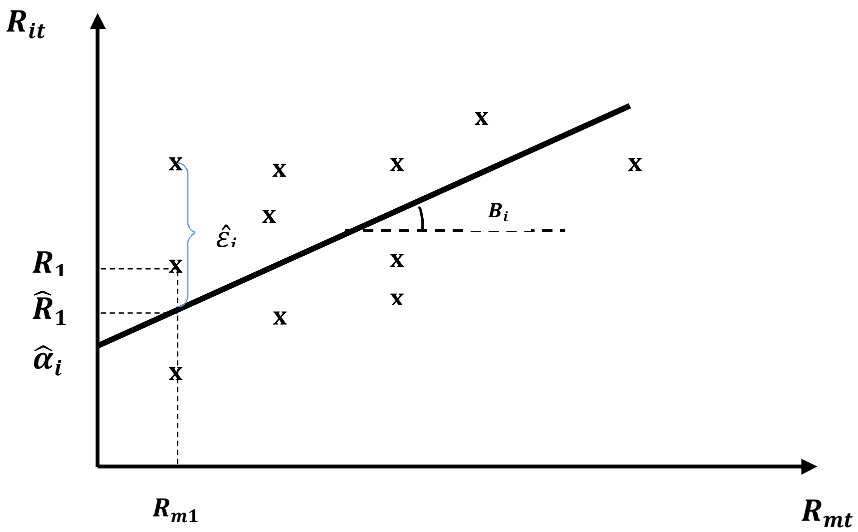
المحور الرابع: نماذج المحفظة المالية.

هدف المحور الرابع: يتلخص هدف هذا المحور في إبراز أهم النماذج التي حاولت تبسيط التطبيق الخاص لنظرية المحفظة الحديثة التي ظهرت على يد هاري ماركوفيتز، لعل من أبرز هذه النماذج نجد كل من نموذج السوق (المؤشر الواحد)، نموذج تسعير الأصول الرأسمالية ونموذج العوامل المتعددة (نظرية التسعير المرجح).

1-نموذج المؤشر الواحد (نموذج السوق): يعد نموذج السوق الذي وضعه وليام شارب من أشهر النماذج التي حاولت تبسيط العمليات الحسابية وتخفيض البيانات المطلوبة في نظرية المحفظة الحديثة لماركوفيتز، يفترض هذا النموذج أن عوائد الأوراق المالية ترتبط بشكل ما مع حركة مؤشر واحد عام هو مؤشر السوق، وبالتالي لا توجد حاجة إلى حساب درجة الإرتباط بين عائد كل ورقة مالية وعائد الأوراق المالية الأخرى، وإنما يكفي فقط معرفة درجة إرتباط عائد الورقة المالية والعائد الخاص بهذا المؤشر الواحد العام. فقد بينت المشاهدة العملية لمعظم أسواق الأوراق المالية أن الإتجاه التصاعدي معبر عنه برقم أو مؤشر عام للسوق عادة ما يصحبه إتجاه تصاعدي لأسعار الأنواع المختلفة للأوراق المتداولة في السوق والعكس صحيح.

يمثل نموذج السوق بيانيا بطريقة سهلة جدا بإعطاء سلسلة مشاهدات لمعدل العائد (أسبوعية لمدة ثمانية عشرة شهرا، شهرية لخمس سنوات...إلخ) لورقة مالية (i) أو المحفظة الخطرة للفترة **t**، ومعدل عائد السوق (m) لنفس الفترة، أي تمثيل الثنائيات (R_{it}, R_{mt}) على منحنى بياني، حيث تبين وجود علاقة خطية بين المعدلين، وعليه قام بإستخدام تحليل الإنحدار الخطي البسيط وطريقة المربعات الصغرى لتقدير معالم النموذج بإيجاد أحسن تصحيح خطي بتدنية مربعات الإنحراف بين المشاهدات الفعلية والمقدرة $\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2$، حيث أن: $\hat{\varepsilon}_i = R_i - \hat{R}_i$، مثلما يوضحه الشكل التالي:



ويقوم نموذج الإنحدار الخطي البسيط الذي يمكننا من تقدير معادلة نموذج السوق لشارب على مجموعة من الفرضيات هي:

- **الفرضية الأولى:** الأمل الرياضي للأخطاء معدوم: $E(\varepsilon_i) = 0, \forall i = 1 \dots n$

- **الفرضية الثانية:** تجانس أو ثبات تباين الأخطاء أي أن تشتتها حول المتوسط ثابت، نعبر عنها رياضيا كمايلي: $Var(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i)^2 = \sigma_{\varepsilon_i}^2 \quad \forall i = 1 \dots n$

- **الفرضية الثالثة:** عدم وجود ارتباط ذاتي للأخطاء، بمعنى أن التباينات المشتركة لأخطاء الملاحظات تكون معدومة على مختلف مشاهدات مكونات العينة، ونعبر عنها رياضيا كما يلي:

$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \ , \quad \forall i \neq j \quad i, j = 1 \dots n$$

- **الفرضية الرابعة:** الأخطاء مستقلة عن R_m:

$$Cov(R_{mi}, \varepsilon_i) = E[(\varepsilon_i - E(\varepsilon_i))(R_m - E(R_m))] = 0 \quad \forall i = 1, \dots n$$

- **الفرضية الخامسة:** أن الأخطاء تتبع توزيعا طبيعيا بمتوسط 0 وتباين ، أي أن: $\varepsilon_i \sim (0, \sigma_{\varepsilon_i}^2)$

وبالأخذ بالفرضيات السابقة وبإعتبار أن نموذج السوق يمثل علاقة خطية بين عائد الورقة المالية (i) وعائد السوق (m) فإن معادلة الإنحدار التي تعبر عن هذه العلاقة تكتب كالآتي:

$$\boldsymbol{R_{i,t} = \alpha_{i,t} + \beta_i R_{m,t} + \varepsilon_{i,t}}$$

ونموذج السوق لا يستند على أي بناء نظري بل هو صياغة تجريبية بحتة، تم تقديمه لأول مرة من قبل وليام شارب سنة 1963، ويتضح من معادلة الإنحدار الخطي البسيط أن عائد الورقة المالية (i) المعبر عنه بـ$(R_{i,t})$ يتحدد من مكونين هما:

- مكون خاضع للسوق (نظامي أو عام): $\boldsymbol{\beta_i R_{m,t}}$؛
- مكون خاص بالورقة المالية (i) ولايتوقف على ظروف السوق: $\boldsymbol{\alpha_{i,t} + \varepsilon_{i,t}}$.

واستنادا إلى العلاقة التي تعبر عن نموذج السوق المبينة أعلاه يمكن إعطاء صيغة عائد ومخاطرة الورقة المالية (i) كما هو موضح فيما يلي:

- **معدل العائد المتوقع للورقة المالية $(\boldsymbol{i})$:** لدينا:

$$\begin{aligned} R_{i,t} &= \alpha_{i,t} + \beta_i R_{m,t} + \varepsilon_{i,t} \\ \Rightarrow E(R_{i,t}) &= E[\alpha_{i,t} + \beta_i R_{m,t} + \varepsilon_{i,t}] \\ \Rightarrow E(R_{i,t}) &= E(\alpha_{i,t}) + E(\beta_i R_{m,t}) + E(\varepsilon_{i,t}) \\ \Rightarrow E(R_{i,t}) &= \alpha_{i,t} + \beta_i E(R_{m,t}) + 0 \end{aligned}$$

وعليه فإن معدل العائد المتوقع للورقة (i) في إطار نموذج السوق يعطى بالصيغة: $\boldsymbol{E(R_{i,t}) = \alpha_{i,t} + \beta_i E(R_{m,t})}$

- **المخاطرة الكلية للورقة المالية $(\boldsymbol{i})$:** لدينا:

$$\begin{aligned} Var(R_i) &= \sigma_i^2 = E[R_i - E(R_i)]^2 \\ \Rightarrow Var(R_i) &= E[\alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i - (\alpha_i + \beta_i E(R_m))]^2 \\ &= E[\beta_i (R_m - E(R_m)) + \varepsilon_i]^2 \\ &= {\beta_i}^2 E[R_m - E(R_m)]^2 + 2\beta_i E[\varepsilon_i (R_m - E(R_m))] + E(\varepsilon_i)^2 \\ &= \boldsymbol{{\beta_i}^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2} \end{aligned}$$

يتضح أن المخاطرة الكلية للورقة المالية (i) المقاسة بالتباين إستنادا على نموذج السوق تنقسم إلى قسمين، القسم الأول خاص بالورقة المالية (i) نفسها تعرف بالمخاطرة الخاصة أو غير النظامية التي يعبر عنها بـ$(\sigma_{\varepsilon_i}^2)$، والقسم

الثاني خاص بتغيرات ظروف السوق الذي يعرف بالمخاطرة المنتظمة أو النظامية ويعبر عنه بالمقدار $(\beta_i{}^2\sigma_m^2)$.

- **معامل التغاير بين الورقة (i) و(j):** نعلم أن معامل التغاير بين عوائد ورقتين ماليتين يعطى بالشكل:

$$Cov(R_{mi}, \varepsilon_i) = \sigma_{ij} = E\big[(R_i - E(R_i))(R_j - E(R_j))\big]$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = E\big[(\alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i - \mathrm{E}(\alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i))(\alpha_j + \beta_j R_m + \varepsilon_j - E(\alpha_j + \beta_j R_m + \varepsilon_j))\big]$$

$$= E\big[((\beta_i \mathrm{E}(R_m - E(R_m)) + \varepsilon_i)((\beta_j \mathrm{E}(R_m - E(R_m)) + \varepsilon_j)\big]$$

$$= \beta_i\beta_j \mathrm{E}(R_m - E(R_m))^2 + \beta_j \mathrm{E}[(\varepsilon_i(R_m - E(R_m))] + \beta_i \mathrm{E}\big[(\varepsilon_j(R_m - E(R_m))\big]) + \mathrm{E}(\varepsilon_i\varepsilon_j)$$

$$= \boldsymbol{\beta_i\beta_j\sigma_m^2}$$

نستنتج أن معامل التغاير بين عوائد الورقة المالية (i) و(j) يعتمد فقط على مخاطر السوق، أي أن التغير في قيم الأوراق المالية معا يرجع فقط إلى وجود حركة عام للقيم في السوق.

- **حساب معامل بيتا (β_i):** نظرا لأن معامل بيتا (β_i) الخاص بالورقة المالية (i) يمثل حسب نموذج السوق ميل معادلة الإنحدار، وبالتالي يمكننا حسابه:

$$.\boldsymbol{\beta_i} = \frac{\Delta \boldsymbol{R_i}}{\Delta \boldsymbol{R_m}}$$

يؤشر معامل بيتا (β_i) الخاص بالورقة المالية (i) إلى مقدار التغير المتوسط في عائد الورق المالية (i) نتيجة تغير عائد السوق بوحدة واحدة، فمثلا معامل (β_i) يبلغ 1,5 يعني أنه في المتوسط سننتظر زيادة في عائد الورقة المالية (i) يقدر بـ 0,015 نتيجة زيادة عائد السوق بـ 0,01 والعكس صحيح.

- **مثال 01:** كم يبلغ معامل بيتا (β_i) إذا علمت أن معدل العائد المتوقع للورقة المالية (i) إرتفع من 05 % إلى 10 % نتيجة ارتفاع معدل عائد السوق بـ 10 %؟.

- **الحل:** بما أن :

$$\beta_i = \frac{\Delta R_i}{\Delta R_m}$$

$$\Rightarrow \beta_i = \frac{(0{,}10 - 0{,}05)}{0{,}10} = \mathbf{0,5}$$

تفسر قيمة معامل بيتا $\beta_i = 0{,}5$ أن مخاطرة الورقة المالية (i) بأن مخاطرة هذه الأخيرة أقل من مخاطرة السوق لأن معامل بيتا أقل من الواحد، ويتم اللجوء إلى هذا النوع من الأوراق في حالة مرور السوق أو الاقتصاد بمرحلة الكساد أو الإنكماش، وتدخل هذه الأوراق في بناء المحافظ الدفاعية أو الحذرة التي تسعى إلى التقليل من الخسائر المرتبطة برأس المال المستثمر، حيث تتكون في الغالب من الأصول التي عوائدها تكون غير حساسة لتغيرات السوق (معامل بيتا (β_i) أقل من الواحد الصحيح)، أي يلجأ إليها في الأوقات التي تتصف بوجود مؤشرات تعكس جليا حالات الإنكماش الاقتصادي.

تذكير: يعني (α_i) في نموذج السوق العائد المتوقع للورقة المالية (i) في حالة ما إذا كان عائد السوق معدوم، أما (ε_i) فيمثل العائد العشوائي أو غير المؤكد في نموذج السوق.

- مثال 02: ليكن لديك المعلومات المبينة في الجدول التالي:

الشهر	(%) (R_i)	(%) (R_m)	(%) (ε_i)
01	10	04	02
02	03	02	-02
03	15	08	01
04	09	06	-02
05	03	0	01

المطلوب:

- بإستخدام نموذج السوق على معطيات الجدول أحسب معالم المعادلة $E(R_{i,t}) = \alpha_{i,t} + \beta_i E(R_{m,t})$ ؟.
- كم تقدر قيمة كل من: $\sigma^2_{\varepsilon_i}$، $\beta_i{}^2\sigma^2_m$ و σ^2_i ؟.

- الحل:

- إن معادلة الإنحدار التي تعبر عن نموذج السوق تكتب كالآتي:

$$R_{i,t} = \alpha_{i,t} + \beta_i R_{m,t} + \varepsilon_{i,t}$$

وبما أن (β_i) و$(\alpha_{i,t})$ ثابتان في المعادلة $E(R_{i,t}) = \alpha_{i,t} + \beta_i E(R_{m,t})$ يمكن إستخدام جملة معادلتين بمجهولين لحساب قيمتها كما يلي:

$$\begin{cases} 10 = \alpha_i + 4\beta_i + 02 \cdots\cdots\cdots (01) \\ 03 = \alpha_i + 2\beta_i - 02 \cdots\cdots\cdots (02) \end{cases}$$

بطرح المعادلة (02) من المعادلة (01) نجد:

$$07 = 04 + 2\beta_i \Rightarrow \beta_i = \frac{03}{02} = \mathbf{01,50}$$

بتطبيق قيمة $\beta_i = 01{,}50$ في المعادلة (01) نجد:

$$10 = \alpha_i + 4(01{,}50) + 02$$
$$\Rightarrow \alpha_i = 08 + 4(01{,}50) = \mathbf{02}$$

وعليه فإن نموذج السوق للورقة المالية (i) للفترة الممتدة من الشهر الأول حتى الخامس تعطى كالآتي:

$$\boldsymbol{E(R_{i,t}) = 2 + 1,5E(R_{m,t})}$$

من الجدول نجد أن متوسط عائد الورقة المالية (i) يبلغ: $E(R_{i,t}) = \frac{10+03+15+09+03}{05} = \mathbf{08}$

وهي نفس القيمة التي سنحصل عليها بتطبيق نموذج السوق للورقة المالية (i) للفترة الممتدة من الشهر الأول حتى الخامس تعطى كالآتي:

$$E(R_{i,t}) = 2 + 1{,}5\left(\frac{04 + 02 + 08 + 06 + 0}{05}\right) = \mathbf{08}$$

- حساب قيمة كل من: $\sigma^2_{\varepsilon_i}$، $\beta_i{}^2\sigma^2_m$ و σ^2_i:

$$\sigma^2_{\varepsilon_i} = \frac{(\varepsilon_i - \overline{\varepsilon_i})^2}{n} \;/\; \overline{\varepsilon_i} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma^2_{\varepsilon_i} = \frac{(02)^2 + (-02)^2 + (01)^2 + (-02)^2 + (01)^2}{5} = \frac{14}{05} = \mathbf{02,80}$$

$$\sigma_{\mathrm{m}}^2 = \frac{(R_m - \overline{R_m})^2}{n} \,/\, \overline{R_m} = 04$$

$$\Rightarrow \sigma_m^2 = \frac{(04-04)^2+(02-04)^2+(08-04)^2+(06-04)^2+(0-04)^2}{5} = \frac{40}{05} = \mathbf{08}$$

وبما أن :

$$\sigma_i^2 = {\beta_i}^2\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

$$\Rightarrow \sigma_i^2 = (01{,}50)^2 \times 08 + 02{,}80 = \mathbf{20{,}80}$$

إثر قيامنا بتحديد عائد ومخاطرة الورقة المالية المنفردة وفق نموذج السوق سنقوم بتحديد صيغة عائد ومخاطرة المحفظة ضمن نفس النموذج كما هو موضح في النقاط التالية:

- **عائد المحفظة في ظل نموذج السوق:** نعلم أن الصيغة العامة لعائد المحفظة مكونة من (n) ورقة مالية خلال الفترة (t) تعطى كما يلي:

$$\boldsymbol{E(R_{P,t}) = \sum_{i=1}^{n} W_i E(R_{i,t})}$$

وبتعويض المقدار $\left(E(R_{i,t}) = \alpha_{i,t} + \beta_i E(R_{m,t})\right)$ في الصيغة العامة لعائد المحفظة المكونة من (n) ورقة مالية خلال الفترة (t) نجد:

$$E(R_{P,t}) = \sum_{i=1}^{n} W_i(\alpha_{i,t} + \beta_i E(R_{m,t}))$$
$$= \sum_{i=1}^{n} W_i\alpha_{i,t} + W_i\beta_i E(R_{m,t})$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{E(R_{P,t}) = \sum_{i=1}^{n} W_i\alpha_{i,t} + \sum_{i=1}^{n} W_i\beta_i E(R_{m,t})}$$

يمكن التعبير عن الصيغة أعلاه: $\boldsymbol{E(R_{P,t}) = \alpha_{p,t} + \beta_p E(R_{m,t})}$ ، حيث أن معامل بيتا (β_p) للمحفظة المكونة من (n) ورقة مالية خلال الفترة (t) يحسب وفق الصيغة: $\boldsymbol{\beta_p = \sum_{i=1}^{n} W_i\beta_i}$ أما $(\alpha_{p,t})$ فتحسب بالعلاقة: $\boldsymbol{\alpha_{p,t} = \sum_{i=1}^{n} W_i\alpha_{i,t}}$.

- **مخاطرة المحفظة في ظل نموذج السوق:** نعلم أن الصيغة العامة لمخاطرة المحفظة مكونة من (n) ورقة مالية خلال الفترة (t) نعبر عنها ضمن الصيغة أسفله:

$$\delta_p^2 = \sum_{i=1}^{n} W_i^2\delta_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} W_i W_J \delta_{ij}$$

بتعويض المقدارين $\left(\sigma_i^2 = {\beta_i}^2\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2\right)$ و$(\delta_{ij} = \beta_i\beta_j\sigma_m^2)$ في الصيغة أعلاه نحصل على:

$$\delta_p^2 = \sum_{i=1}^{n} W_i^2\left({\beta_i}^2\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} W_i W_J \beta_i\beta_j\sigma_m^2$$

وعليه فإن:

$$\delta_p^2 = \sum_{i=1}^{n} W_i^2 {\beta_i}^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} W_i W_J \beta_i \beta_j \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{n} W_i^2 \, \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

تذكير: يلزم لحساب عائد ومخاطرة المحفظة المكونة من (n) ورقة مالية خلال الفترة (t) في ظل نموذج السوق لشارب تحديد كل من: α_i ، β_i، $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ لكل ورقة مالية (i)؛ $E(R_{m,t})$، σ_m^2 الخاصة بالسوق. وعليه نحتاج إلى عدد من التقديرات قدرها $(3n + 2)$ ، أي أنه لسوق مكون من أوراق مالية يتراوح عددها بين 150 و250 ورقة، فإن نموذج السوق يحتاج من 452 إلى 752 تقدير، بينما في نموذج ماركوفيتز ينبغي تقدير من 150 إلى 250 عائد ومن 150 إلى 250 تباين لكل ورقة مالية بالإضافة إلى الحاجة إلى تقدير معاملات إرتباط أو تغاير قدرها: $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \binom{n}{2}$ ، أي يلزم تقدير من 11175 إلى 31125 معامل إرتباط حسب نموذج ماركوفيتز.

- مثال 03: ليكن لديك المعلومات حول أربع أوراق مالية:

الورقة المالية	01	02	03	04
α_i	02	03	01	04
β_i	01 ,50	01,30	0 ,6	0,9
$\sigma_{\varepsilon i}$	03	01	02	04

المطلوب:

- إذا علمت أن $E(R_m) = 08$ و$\sigma_m = 05$ ، أحسب متوسط العائد لكل ورقة مالية، تباين العائد لكل ورقة مالية ومعامل التغاير بين عوائد الأوراق المالية؟.

- أحسب β_p، α_p، σ_p^2، $E(R_p)$، بفرض أننا نريد تكوين محفظة من الأوراق المالية الأربعة بوزن نسبي متساوي.

- الحل: تتلخص نتائج مطلوب المثال رقم 03 في التالي:

الورقة المالية	01	02	03	04
$E(R_i)$	14	13,40	07,40	11,20
σ_i^2	65,25	43,25	20	36,25

معامل التغاير بين عائد أزواج الأوراق المالية:

الورقة المالية	01	02	03	04
01	65,25	48,75	30	33,75
02	48,75	43,25	26	29,25
03	30	26	20	18
04	33,75	29,25	18	36,25

- $\beta_p = \mathbf{1,125}$ ،$\alpha_p = \mathbf{2,5}$ ،$\sigma_p^2 = \mathbf{33,52}$ ،$E(R_p) = \mathbf{11,5}$

تذكير: إذا كانت المحفظة (P) هي ذاتها محفظة السوق (m) أي تساوي معدل العائد المتوقع لهما ($E(R_m) = E(R_p)$) فإن معامل بيتا لهذه المحفظة يتساوي مع معامل بيتا للسوق ويساوي الواحد الصحيح ($\beta_p = \beta_m = 1$) يكون المقدار (α_p) معدوما أي ($\alpha_p = 0$).