

Chapitre III

Plasticité et rupture

3.1 Introduction

Le mot « **plasticité** » signifie « **mettre en forme** ». Les matériaux qui sont « plastiques » au sens du mécanicien se caractérisent par leur bonne ductilité, c'est à dire une aptitude à se déformer beaucoup avant rupture, propriété qui permet leur mise en forme par déformation.

Selon des données expérimentales, beaucoup de matériaux montrent un comportement réversible aux contraintes très petites. Par contre, des déformations **irrécouvrables** et permanentes se produisent au-delà d'une **contrainte de seuil**.

Ce genre de comportement, décrit au moyen de la théorie de plasticité, s'applique en particulier aux sols, où la nature **irréversible** des déformations est principalement le résultat des mouvements relatifs entre les particules.

3.2 Comportement inélastique des matériaux

Pour identifier le comportement macroscopique d'un matériau, on commence par réaliser des essais uniaxiaux sur éprouvette ; des essais où l'on exerce des forces de traction ou de compression dans une direction.

Les réponses-types sont commentées ci-dessous et représentées sur la Figures 3.1 :

- 1- Pour un acier doux, on observe une réponse **quasi-linéaire**, puis la courbe s'infléchit voire redescend légèrement, se stabilise autour d'une valeur pratiquement constante avant de croître à nouveau, de passer par un maximum et de redescendre.
- 2- Pour un élastomère, la courbe contrainte-déformation est toujours fortement **non linéaire**, d'abord concave puis convexe avec un changement de concavité vers quelques % de déformation. Le module de Young tangent est beaucoup plus faible que pour un acier.
- 3- Pour une éprouvette en béton soumise à un essai de traction, on observe une réponse **quasi-linéaire**, puis une décroissance rapide de la contrainte (phénomène appelé adoucissement).

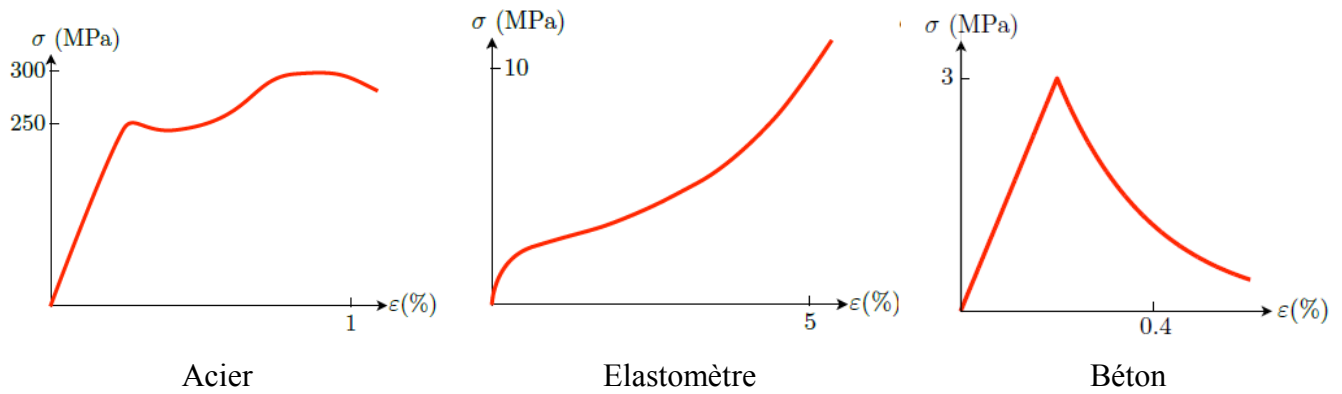


Figure 3.1- Réponses schématiques de différents matériaux dans un essai de traction uniaxiale

Les **non-linéarités** observées lors de certaines phases de la réponse sous chargement monotone s'avèrent être dues à une **irréversibilité** du comportement, et on le constate en faisant des chargements non monotones (cycle charge-décharge) comme le montre la figure 3.2 ; l'acier doux et le béton vont garder une certaine déformation après décharge, tandis que l'élastomère aura une déformation nulle.

Si l'on revient à un chargement monotone et si on augmente la déformation, l'éprouvette finit par se rompre. Ici encore les mécanismes de rupture observés sont très variés et fortement dépendants du matériau et de l'essai.

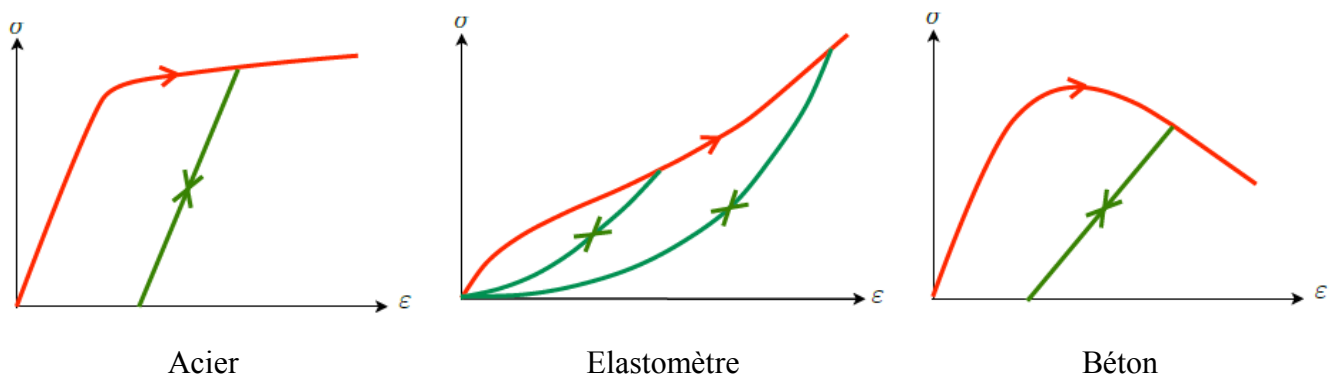


Figure 3.2- Réponses schématiques de différents matériaux dans un cycle charge-décharge

3.3 Plasticité

Une hypothèse fondamentale de plasticité est que la déformation totale peut être décomposée en une composante **élastique** et une composante **plastique**.

La composante élastique de la déformation est calculée selon la relation constitutive élastique.

Pour identifier les déformations plastiques il est nécessaire d'introduire :

- ✓ Un critère limite,
- ✓ Une règle d'écoulement plastique et
- ✓ Une règle d'écrouissage,

qui permettent de spécifier quand les déformations plastiques se produisent, leur direction et leur grandeur.

3.3.1 Comportement élastoplastique

Un corps est dit avoir un comportement "élastoplastique" quand au-delà d'un certain niveau de chargement il présente des déformations réversibles (élastiques) mais aussi des déformations irréversibles (plastiques) et que ces déformations et les contraintes obéissent à des lois bien précises.

Notons que la considération d'un corps élastoplastique se fait en excluant l'influence du paramètre temps. On définit d'abord un critère de plasticité qui est une fonction des contraintes, éventuellement écrouissable avec les déformations. Ce critère ne peut être dépassé en aucun point.

Lorsqu'il est atteint, débutent les déformations irréversibles ou plastiques. Ces déformations sont, elles, régies par une loi dite loi d'écoulement. Pour un comportement élasto-plastique, on écrit :

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (3.1)$$

Où

$d\varepsilon$ sont les déformations totales

$d\varepsilon^e$ sont les déformations élastiques

$d\varepsilon^p$ sont les déformations plastiques.

3.3.2. Critère limite

Représentons sur un diagramme orthogonal les résultats d'un essai de traction ou de compression simple d'un sol ; nous obtiendrons la courbe de la figure 3.3.

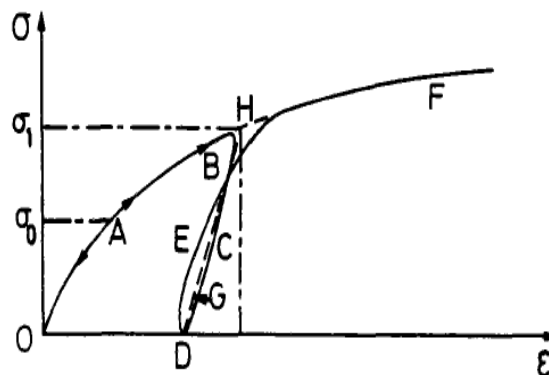


Figure 3.3- Essai de compression (traction) simple du sol

Le long du chemin OA, le comportement est élastique, c'est-à-dire quand on décharge on revient à O. le point A, point limite au-delà duquel on n'a plus le comportement élastique correspond à une contrainte caractéristique dite « seuil » de plasticité initial ou « limite élastique ». Après l'avoir franchi, et si étant au point B, par exemple, on décharge, le chemin de déchargement ne sera pas BAO mais BCD. La déformation

qui reste $OD = \varepsilon^p$ est une déformation irréversible, dite plastique. On est donc entré dans le domaine plastique. Si on recharge, le chemin sera DEF, F étant le prolongement du chemin OAB. Il rejoint alors le chemin du premier chargement.

On peut assimiler en général la courbe BCDEF à la droite DGH et admettre que les déformations sont réversibles le long de cette ligne. Le nouveau seuil de plasticité est alors le point H qui est plus élevé que le précédent. Cette élévation du seuil de plasticité s'appelle écrouissage.

D'une façon plus générale et pour les cas tridimensionnels, le seuil de plasticité est remplacé par une fonction f dite "fonction de charge" ou « critère de plasticité » telle que :

$$F(\sigma, R) = 0 \quad (3.2)$$

Avec ;

σ : Tenseur des contraintes,

R : L'ensemble des paramètres « cachés » ou « d'écrouissage »

Cette fonction décrit dans l'espace des contraintes, une surface dite de charge ou d'écoulement, la position de cette surface dépend de la valeur instantanée du paramètre d'écrouissage :

Si $F < 0$: c'est l'intérieur de la surface, on est dans le domaine élastique

$F = 0$: on est dans le domaine plastique.

$F > 0$: c'est un état de contrainte physiquement impossible en élasto-plasticité.

Cette fonction décrit dans l'espace des contraintes-déformations une surface dite communément en Mécanique des Sols "surface d'état limite" dont la projection dans le plan des contraintes est une courbe dite "courbe d'état limite" (Fig.3.4).

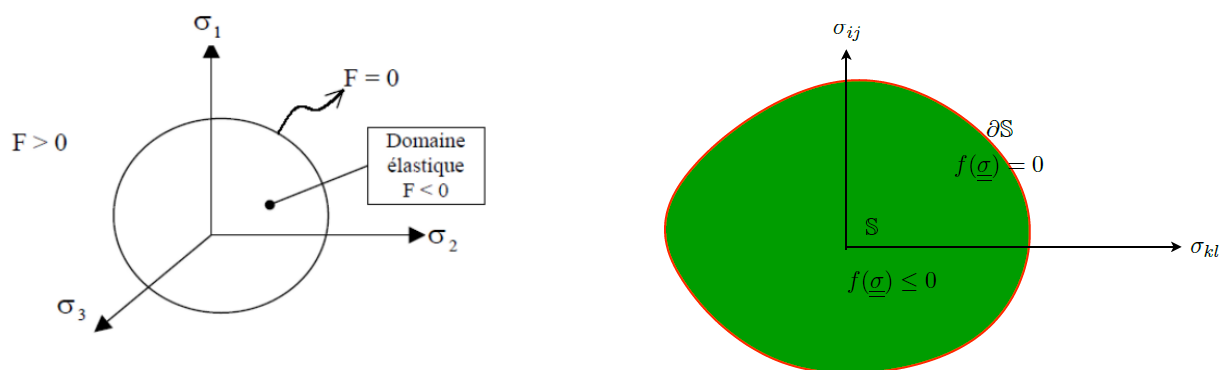


Figure 3.4- Le domaine d'élasticité (en vert) et la surface seuil de plasticité (en rouge) dans l'espace des contraintes.

Le critère de plasticité F est une fonction du tenseur des contraintes (σ_{ij}) et des paramètres d'écrouissage (k), on écrit donc $F(\sigma_{ij}, k)$.

Les critères de plasticité sont considérés comme des seuils à partir desquels l'écoulement plastique se développe. Certains critères font appel à **la courbe intrinsèque du matériau** (comme le critère de Tresca par exemple) d'autres faisant appel à la **notion de contrainte équivalente** (comme le critère de Von Mises).

3.3.3. Ecouissage

L'écrouissage est un phénomène qui se traduit lors d'un comportement élastoplastique d'un matériau. Pour le comprendre, observons la courbe de traction (contrainte-déformation) d'un acier illustré dans la Figure 3.5 :

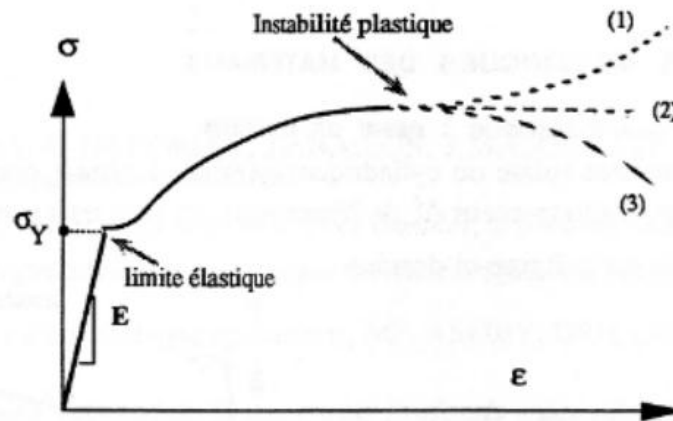


Figure 3.5- Courbe contrainte-déformation sous traction

On observe classiquement sur la courbe une zone élastique (élasticité linéaire), une zone pendant laquelle la contrainte croît avec la déformation (**écrouissage du matériau**) et une zone d'instabilité plastique qui se traduit par une striction de l'éprouvette.

De manière à définir un critère de plasticité du matériau utilisable dans un code, on fait l'hypothèse tout d'abord que la **partie élastique des déformations est négligeable**. De plus, **nous ne ferons pas intervenir l'écrouissage**. La courbe de traction d'un matériau modélisé de cette manière serait la suivante (Fig.3.6) :

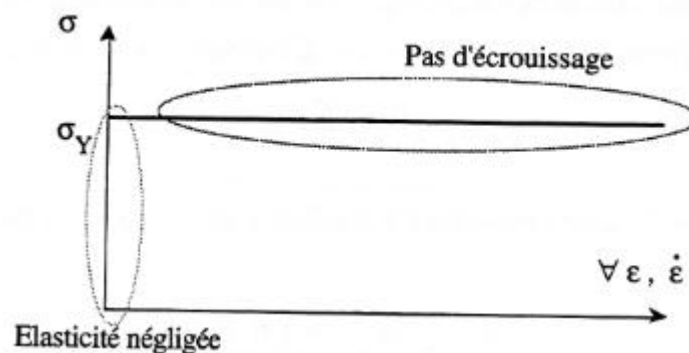


Figure 3.6- Comportement parfaitement plastique

Notons ici que le paramètre d'écroissage le plus utilisé pour les sols est la déformation volumique plastiquée. Divers modèles ont été proposés pour le phénomène d'écroissage, nous citons ici les deux tendances principales :

- Celle de la théorie de **l'écroissage isotrope** qui admet que dans le domaine élastique intérieur au critère de plasticité se transforme par homothétie de centre 0 pendant l'écroissage,
- Et celle de la théorie de **l'écroissage cinématique** qui propose que le domaine élastique se translate dans l'espace des contraintes.

Si la surface limite augmente uniformément, le processus est appelé écroissage isotrope ; Si la surface translate simplement sans modifier sa forme et taille, alors le processus est appelé écroissage cinématique (Fig.3.7).

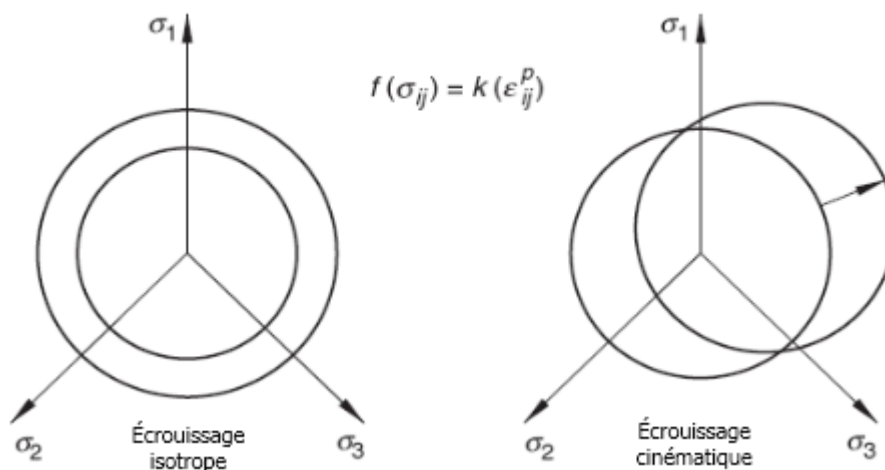


Figure 3.7- *Écroissage isotrope et cinématique*

- **L'écroissage isotrope**, induit par la déformation plastique, est associé à une augmentation isotrope de la résistance à l'écoulement. Caractérisé par son rayon $R(\epsilon_p)$ le domaine d'élasticité s'étend en fonction de la déformation plastique (peu de matériaux ont un comportement de ce type) (Fig.3.8).

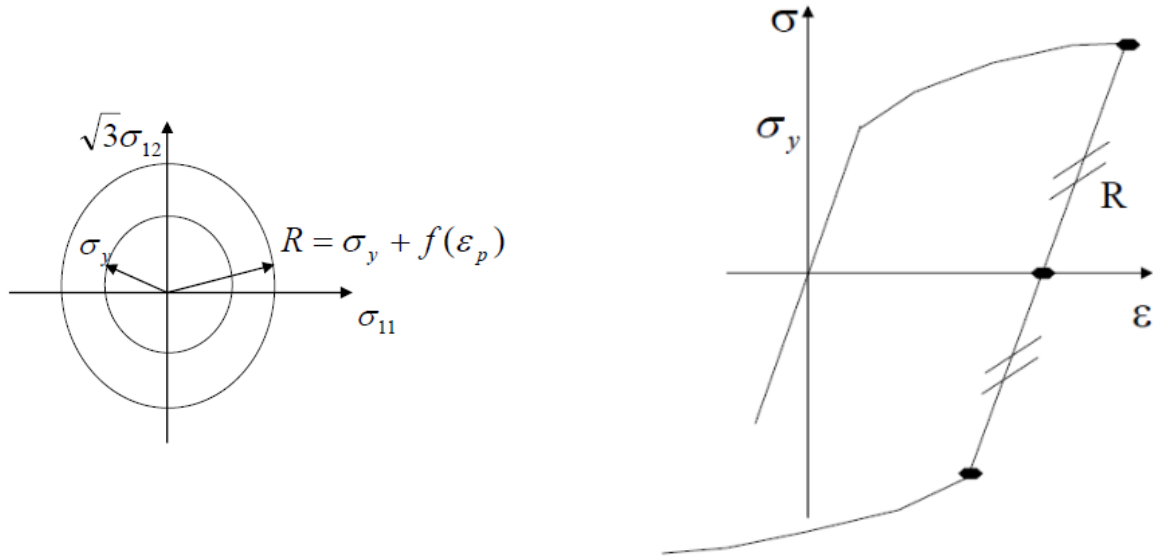


Figure 3.8- Ecrouissage isotrope idéal

- L'écrouissage cinématique (X) induit par la déformation plastique est associé à un déplacement du centre du domaine d'élasticité. Il est par nature anisotrope et associé à un tenseur d'ordre deux..
- Dans le cas représenté dans la figure 3.9, la taille du domaine d'élasticité reste constante au cours de la déformation. L'écrouissage cinématique peut présenter un caractère linéaire ou non linéaire. La plupart des matériaux présente cette composante d'écrouissage.

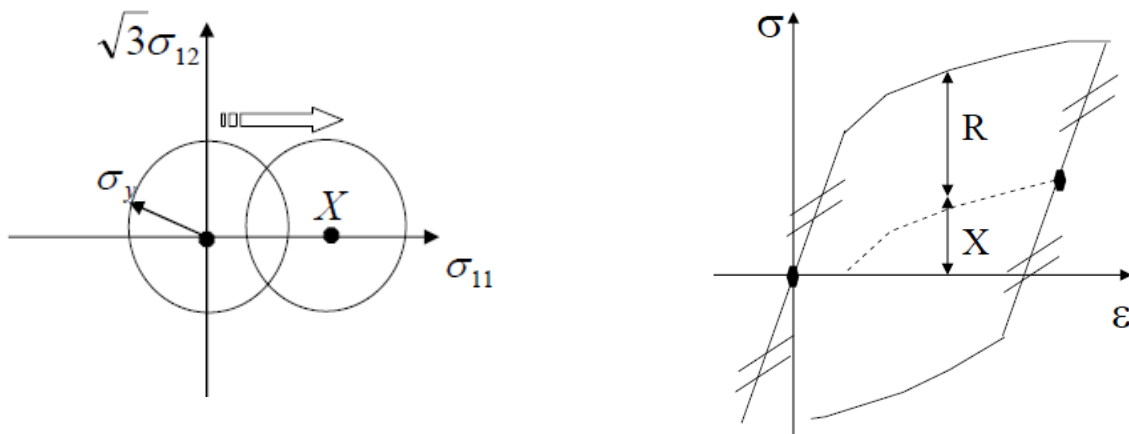


Figure 3.9- Ecrouissage cinématique

En conclusion, se rapportant à la figure 3.10, où les deux cas de l'écrouissage positif et négatif sont montrés afin de calculer des contraintes que nous devons indiquer l'alternative, chargement ou déchargement :

$$\delta\sigma = \frac{1}{\lambda} \delta\epsilon \quad si \quad \delta\epsilon \geq 0 \tag{3.3}$$

$$\delta\sigma = \frac{1}{k} \delta\epsilon \quad si \quad \delta\epsilon \leq 0 \tag{3.4}$$

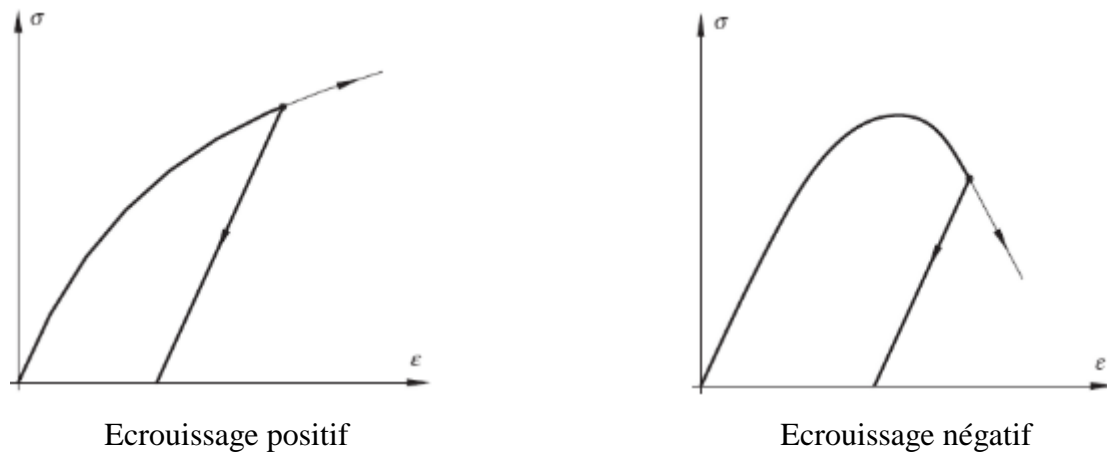


Figure 3.10- Ecrouissage positif et négatif

3.3.4. Règle d'écoulement plastique

De manière générale, l'évolution de la surface de charge est mathématiquement caractérisée par des relations entre les contraintes et les déformations plastiques. Ces relations définissent **la règle d'écoulement** du matériau qui exprime l'incrément des déformations plastiques $d\varepsilon_{ij}^P$ en fonction de σ_{ij} et $d\sigma_{ij}$ et de l'état d'écrouissage représenté par k .

La règle d'écoulement plastique, qui définit, dans le cas des sollicitations multiaxiales, la façon dont évolue la déformation plastique, qui peut être exprimée par un potentiel plastique G ,

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{\delta G}{\delta \sigma_{ij}} \quad (3.5)$$

Avec ; $d\lambda$ un scalaire,

La règle d'écoulement est dite **associée** si la déformation plastique suit la normale de la courbe d'état limite ou la surface de charge.

3.4 Critères d'épuisement

Le critère d'épuisement détermine le niveau de charge auquel la déformation plastique commence, il peut être formulé en fonction de l'état de contraintes et d'autres paramètres k liés aux propriétés d'écrouissage du matériau.

$$F(\sigma, k) = 0 \quad (3.6)$$

Pour les matériaux isotropes, la fonction de charge dépend des trois contraintes principales σ_1 , σ_2 et σ_3 :

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, k) = 0 \quad (3.7)$$

Pour les métaux, l'expérience a montré que la limite élastique est indépendante de la pression hydrostatique c'est à dire de l'invariant I_1 . On peut donc exprimer la fonction de charge en fonction des invariants J_2 et J_3 du déviateur :

$$F(J_2, J_3, k) = 0 \quad (3.8)$$

Pour certains matériaux, les sols et les bétons, l'expérience a montré que des variations de volume apparaissent pendant l'écoulement plastique (critère de Mohr-Coulomb et Druker-Pargger) le critère peut également se formuler en fonction des trois invariants de contraintes I_1, J_2 et J_3 :

$$F(I_1, J_2, J_3, k) = 0 \quad (3.9)$$

✚ Rappel de MMC :

Invariants de $\underline{\sigma}$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\ I_2 &= \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2) = \frac{1}{2} (\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) \\ I_3 &= \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^3) = \frac{1}{3} (\sigma_I^3 + \sigma_{II}^3 + \sigma_{III}^3) \end{aligned}$$

Tenseur déviateur des contraintes :

On décompose $\underline{\underline{\sigma}}$ en une partie sphérique et une partie déviatoire :

- partie sphérique ou contrainte moyenne : $\sigma_m = \frac{\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})}{3} = I_1/3$
- partie déviatorique : $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m \underline{\underline{I}}$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{s}} + \sigma_m \underline{\underline{I}} \\ \text{tr}(\underline{\underline{s}}) &= 0 \end{aligned}$$

Invariants de $\underline{\underline{s}}$:

$$\begin{aligned} J_1 &= \text{tr}(\underline{\underline{s}}) = 0 \\ J_2 &= \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}) = I_2 - \frac{I_1^2}{6} \\ J_3 &= \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{s}}^3) = I_3 - 2 \frac{I_1 J_2}{3} + \frac{I_1^3}{27} \end{aligned}$$

3.5 Critères de plasticité

On appelle critère de plasticité, une loi définit explicitement la forme de la surface de plasticité. Les critères de plasticité ont été initialement développés pour les métaux et ont ensuite été utilisés pour les sols, notamment en tant que critères de rupture.

3.5.1. Critère de Mohr-Coulomb

Le critère de rupture de Mohr- Coulomb (Fig.3.11) est connu comme le critère le plus utilisé dans la pratique de l'ingénierie pour décrire de manière approchée le comportement des sols pulvérulents (sable et gravier) et le comportement drainé, à long terme des sols fins saturés (limon et argile).

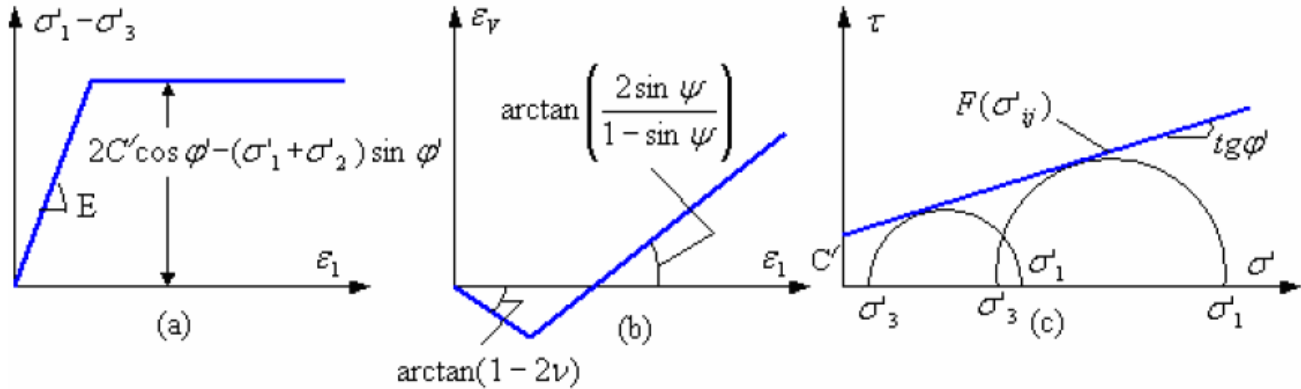


Figure 3.11- Loi de comportement élastique, parfaitement plastique de Mohr-Coulomb

Le critère de rupture de Mohr-Coulomb présenté dans le plan (contrainte normale σ' -contrainte de cisaillement τ) est défini comme suit :

$$\tau = \sigma' \operatorname{tg}\varphi' + c' \tag{3.10}$$

Avec ;

$$\sigma' = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} + \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} \cos(-2\theta); \quad \tau = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} \sin(-2\theta)$$

σ'_1, σ'_3 : contraintes effectives principales majeure et mineure,

θ : angle repérant la facette par rapport à la facette de la contrainte principale majeure σ'_1

φ' : angle de frottement,

c' : cohésion.

Le comportement élastique linéaire parfaitement plastique avec le critère de rupture de Mohr-Coulomb est finalement caractérisé par une élasticité linéaire (E, ν) et un seuil de plasticité, défini par la cohésion c' , l'angle de frottement interne φ' , et l'angle de dilatance ψ , en plus de l'état initial. Il faut pour cela faire au moins deux essais triaxiaux à des pressions de confinement différentes pour déterminer les paramètres du modèle.

La surface de charge $F(\sigma_{ij})$ du critère de Mohr-Coulomb s'exprime de façon suivante :

$$F(\sigma'_{ij}) = (\sigma'_1 - \sigma'_3) - (\sigma'_1 + \sigma'_3)\sin\varphi' - 2c' \cdot \cos\varphi' = 0 \tag{3.11}$$

Dans l'espace des contraintes principales, l'équation (3.10) représente un cône dont la section normale à chaque point est un exagone irrégulier (Fig.3.14).

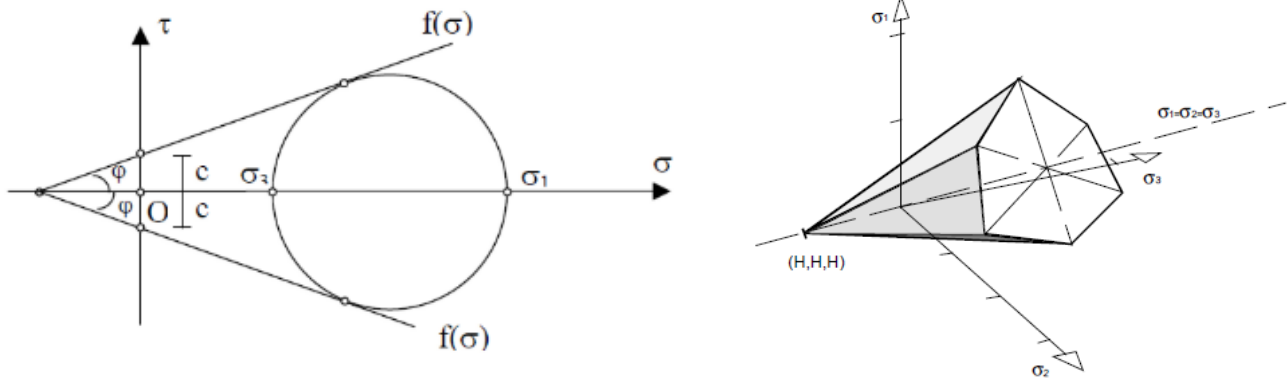


Figure 3.14- Représentation graphique du critère de Mohr-Coulomb

Lorsque l'angle de frottement $\phi = 0$, le critère est appelé *critère de Tresca*.

3.5.2. Critère de Tresca

Tresca [1864], après des essais sur le Plomb, conclut que la plastification arrive quand la contrainte tangentielle maximale atteinte une certaine limite. On peut écrire donc :

$$F = \sigma_1 - \sigma_3 - 2k \tag{3.12}$$

où : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Si les contraintes principales sont σ_1, σ_2 et σ_3 , où $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, alors la plastification commence quand :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = Y(k) \tag{3.13}$$

où : Y : un paramètre matériel déterminé expérimentalement.

k : paramètre d'écrouissage.

Le seuil de la valeur de Y est habituellement la contrainte qui est déterminé de l'essai de traction simple (unidimensionnel).

Pour la condition de plastification, on a :

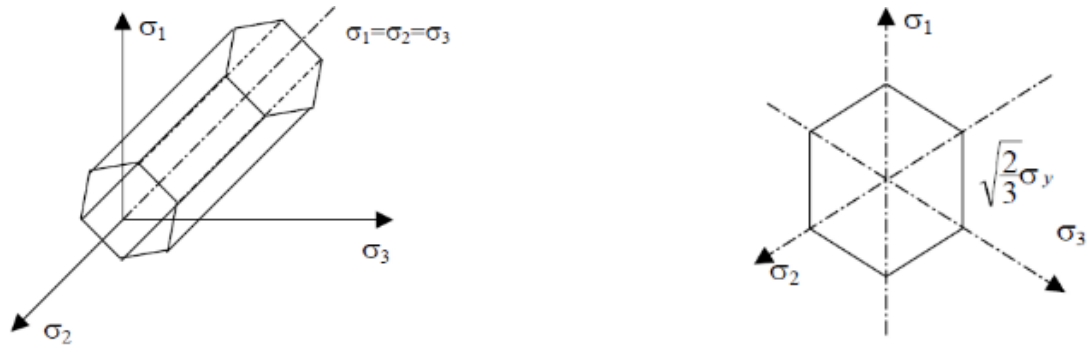
$$\text{Sup}_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| \leq \sigma_0. \tag{3.14}$$

Ou ;

$$\max \left[\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \right] = \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} = \frac{\sigma_y}{2} \tag{3.15}$$

σ_y : Est la contrainte d'épuisement initiale en traction simple.

Dans l'espace de contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, la surface définie par la fonction de charge est un prisme parallèle à l'axe (1,1,1) à base hexagonale régulière (Fig.3.11).



Représentation du critère de Tresca dans l'espace

Section du prisme par le plan $\pi : \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$

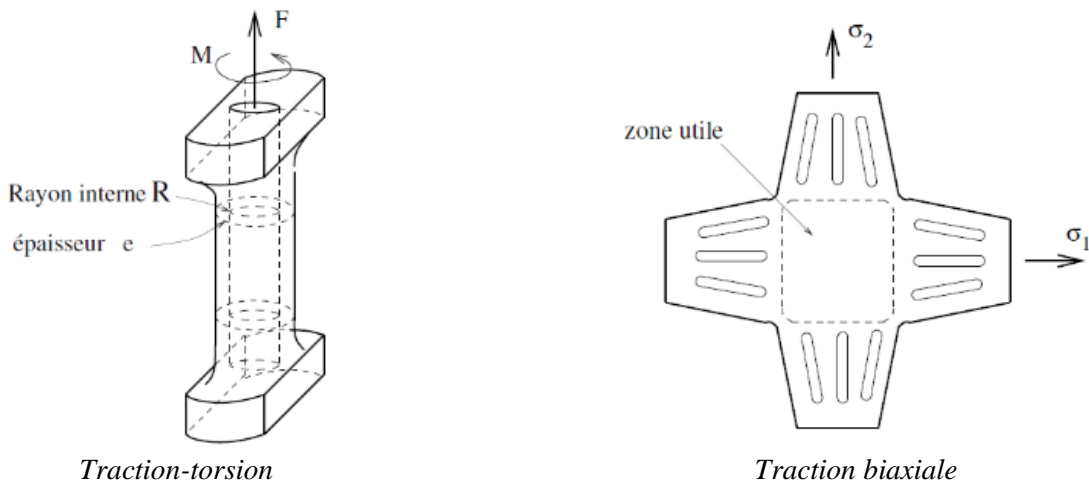
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

Figure 3.11- Représentation graphique du critère de Tresca

Exemple :

Pour un champ de la forme (Fig.3.12), les contraintes principales sont :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$$



Traction-torsion

Traction biaxiale

Figure 3.12- essais biaxiaux

Le critère de Tresca, qui est un **cas particulier du critère de Mohr-Coulomb**, est utilisé pour les sols cohérents à court terme.

3.5.3. Critère de Von-Mises

Selon le **critère de plasticité de von Mises**, la déformation d'un matériau commence lorsque le second invariant de contrainte déviatorique J_2 atteint une valeur critique. C'est pourquoi cette théorie est parfois appelée Théorie de la plasticité J_2 ou du flux J_2 :

$$F = J_2 - k^2 = 0 \tag{3.16}$$

La plasticité se produit quand :

$$\sqrt{3J_2} \geq \sigma_y \tag{3.17}$$

Où ;

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{2} [s_x^2 + s_y^2 + s_z^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 \tag{3.18}$$

Avec ;

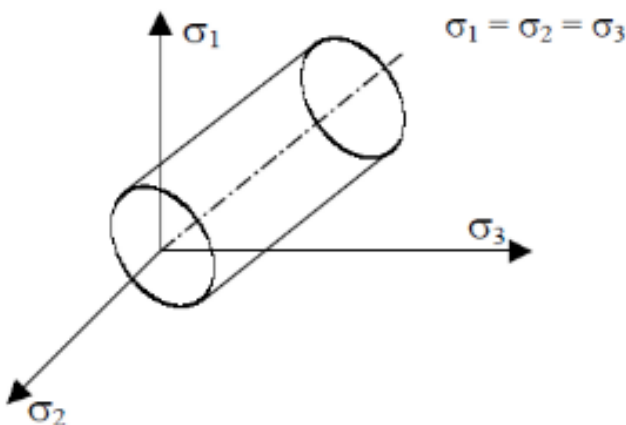
$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \tag{3.19}$$

Ou bien ;

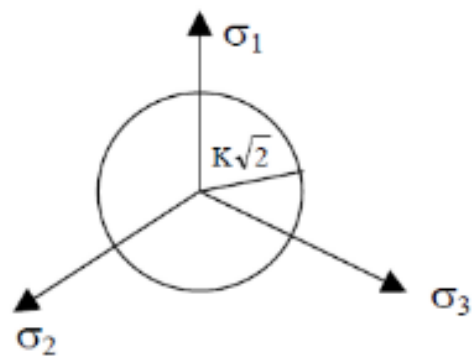
$$F = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) - k^2 = 0 \tag{3.20}$$

C'est l'équation d'un cylindre à base circulaire axé sur la trisectrice de repère $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, sa section par le plan π ($\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$) est un cercle dont le rayon est $k\sqrt{2}$ (Fig.3.13).

Le paramètre k représente **la résistance maximale** du matériau au **cisaillement simple** (roches) ou à la **traction simple** (métaux).



Représentation du critère de Von-Mises dans l'espace $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$



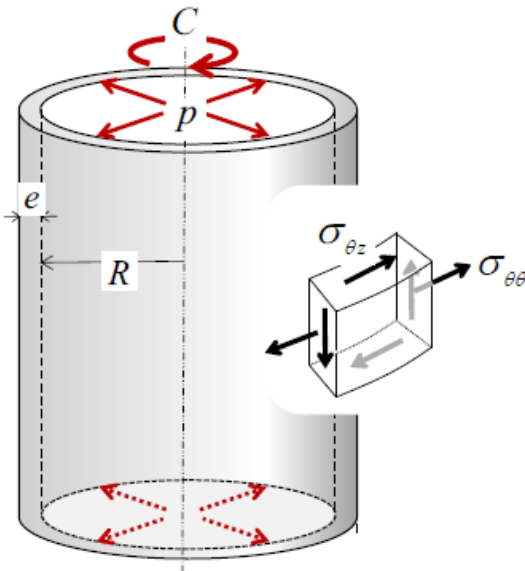
Section du prisme par le plan $\pi : \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$

Figure 3.13- Représentation graphique du critère de Von-Mises

L'élasticité associée est l'élasticité linéaire isotrope de Hooke. La loi de comportement de Von Misés comporte donc 3 paramètres : E, ν , k.

Ce critère a été formulé pour étudier le comportement des métaux et il n'est pas bien adapté à la représentation du comportement des sols.

Application



Un tube circulaire est soumis à une pression interne p et à un couple de torsion C , aucun effort n'étant exercé selon l'axe Oz du tube. Compte tenu du fait que son épaisseur e est petite devant le rayon R ($e \ll R$), on admettra (sans le démontrer) que l'état de contrainte en tout point de l'épaisseur du tube s'écrit en composantes dans le repère cylindrique local (voir figure) :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{r,\theta,z} = \begin{pmatrix} \sigma_r \cong 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{\theta z} & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

avec $\sigma_{\theta\theta} = p \frac{R}{e}$ et $\sigma_{\theta z} = \frac{C}{2\pi R^2 e}$

Le matériau obéissant à un critère de plasticité de *von Mises* défini par :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = (1/2 \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}})^{1/2} - k \leq 0 \quad (2)$$

écrire ce critère en fonction des composantes $\sigma_{\theta\theta}$ et $\sigma_{\theta z}$ et en déduire le *domaine d'élasticité* du tube dans le plan des *paramètres de chargement* (p, C) que l'on exprimera sous la forme :

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^2 + \left(\frac{C}{C_0}\right)^2 - 1 \leq 0 \quad (3)$$

où l'on calculera p_0 et C_0 en fonction de k, R et e . Représenter ce domaine dans le plan (p, C).

✚ Solution

Le déviateur de l'état de contrainte (1) s'écrit :

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - 1/3(\text{tr}\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{\theta z} & 0 \end{pmatrix} - 1/3 \begin{pmatrix} \sigma_{\theta\theta} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_{\theta\theta}/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sigma_{\theta\theta}/3 & \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{\theta z} & -\sigma_{\theta\theta}/3 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$1/2 \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} = 1/2 [2\sigma_{\theta z}^2 + 6\sigma_{\theta\theta}^2/9] = \sigma_{\theta z}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2/3$$

et donc :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = (\sigma_{\theta z}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2/3)^{1/2} - k \leq 0$$

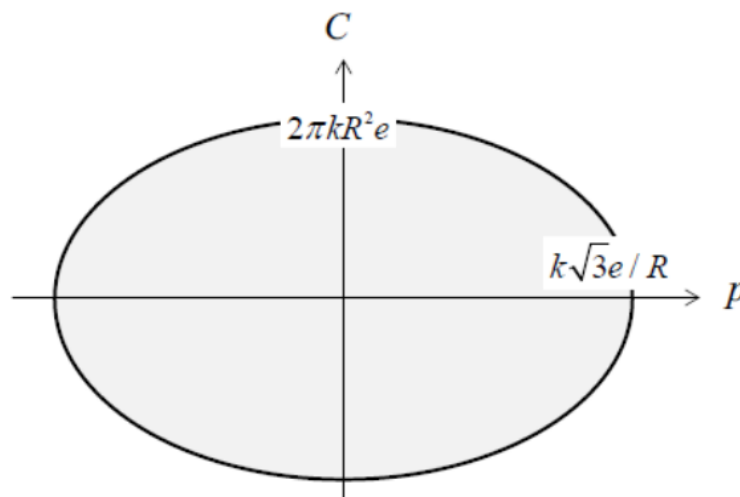
Remplaçant les contraintes par leurs expressions en fonction des paramètres de chargement du tube, il vient alors :

$$\left(\left(\frac{C}{2\pi R^2 e} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{pR}{e} \right)^2 \right)^{1/2} - k \leq 0$$

soit encore :

$$\left(\frac{p}{p_0} \right)^2 + \left(\frac{C}{C_0} \right)^2 - 1 \leq 0 \quad \text{avec } p_0 = k\sqrt{3}e/R \quad \text{et } C_0 = 2\pi kR^2 e$$

Le domaine d'élasticité correspondant est représenté sur la figure ci-dessous. Il s'agit d'un domaine elliptique de demi-axes p_0 et C_0 . Il convient de noter que si le critère (2) est un critère de *plasticité parfaite* (sans écrouissage), la frontière de ce domaine est également le lieu des *chargements limites*.



Références bibliographiques

- A. Barbas, Contribution à l'utilisation de la méthode des éléments finis en mécanique des sols dans le domaine de l'élasto-plasticité. Mécanique. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1981.
- P. Suquet, Rupture et plasticité, Ecole polytechnique, France, 2004.
- T. Loc Nguyen, Étude expérimentale de la loi d'écoulement de matériaux anisotropes transverses, Sciences de l'ingénieur [physics], Ecole des Ponts ParisTech, 2008.
- Z. Harichane, Cours de Magister « Rhéologie des sols », Université Haasiba Benbouali, Chelf, Algérie, 2010.
- J-J. Marigo, MEC 551 Plasticité et Rupture, Département de Mécanique, Edition 2016.